Chapitre 4

Chute libre

Objectifs :

- savoir calculer les équations horaires du mouvement d'un objet en chute libre.
- savoir calculer la trajectoire d'un objet en chute libre.

Nous allons étudier dans ce chapitre la trajectoire d'une corps lancé (une balle par exemple) en ne tenant pas compte des effets des frottements de l'air sur la trajectoire de l'objet. Autrement dit, nous considérons que **la seule force qui s'exerce sur l'objet est la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur l'objet**. Le corps est alors en chute libre et l'accélération du corps est alors égale à l'accélération de la pesanteur, c'est-à-dire :

$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}} \tag{4.1}$$

En l'absence de frottements, la trajectoire d'un objet en chute libre est indépendant de sa masse.

La video `http://phymain.unisciel.fr/chutes-comparees-dune-piece-et-dune-feuille/` montre le rôle des frottements de l'air.

Puisque nous négligeons les effets des frottements de l'air, le mouvement de la balle est **contenu dans un plan.** Nous utilisons donc **un repère cartésien Oxy à deux dimensions** pour repérer la position de la balle (voir figure 4.1). Nous orientons l'axe Oy positivement vers le haut. Nous avons donc $\vec{g} = -g\vec{u}_y$, ce qui donne :

$$\boxed{\vec{a} = -g\vec{u}_y} \tag{4.2}$$

Le saviez-vous ?

La rotation d'une balle sur elle-même crée une variation de la pression exercée par l'air de part et d'autre de la balle qui peut courber sa trajectoire. Ce principe est utilisé par les joueurs de foot ou de tennis pour courber la trajectoire d'une balle. L'air en entrainé par la balle lors de sa rotation, il y a donc de l'air éjecté dans le sens opposé à sa courbure.

La vidéo suivante `https://www.canal-u.tv/video/tele2sciences/des_ciseaux_en_chute_libre.15224` montre la chute libre de ciseaux ouverts. Chaque partie des ciseaux tombent avec la même vitesse, les ciseaux restent donc ouvert pendant toute la durée de la chute. Lorsque les ciseaux ne sont pas en chute libre,le poids de chaque partie est différent ce qui referme les ciseaux. L'effet de la masse est "annulé" lors de la chute libre.

4.1 Équations horaires du mouvement

Nous allons établir dans cette partie les **équations horaires du mouvement $x(t)$ et $y(t)$ de la balle.** Nous partons de l'équation $\vec{a} = -g\vec{u}_y$ que nous devons intégrer deux fois pour obtenir les équations du mouvement. La projection de l'équation 4.2 sur les axes produit les deux équations scalaires :

$$a_x = 0 \tag{4.3}$$
$$a_y = -g \tag{4.4}$$

Nous nommons **$\vec{v}_0$ le vecteur vitesse initial de la balle** qui fait un angle α avec l'horizontal. La balle est à l'origine des axes à $t = 0$. Les conditions initiales s'écrivent donc :

$$\begin{cases} x(t=0) = 0 \\ y(t=0) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_x(t=0) = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y(t=0) = v_0 \sin(\alpha) \end{cases}$$

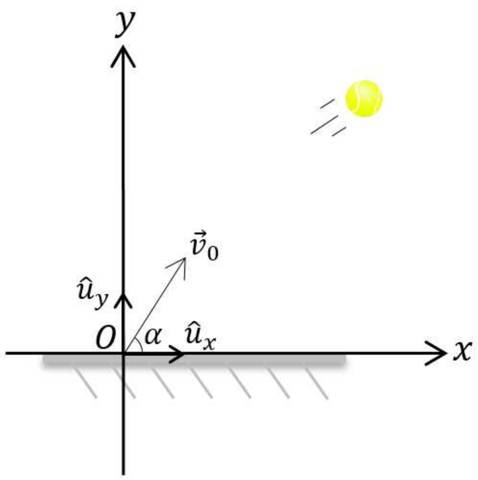

FIGURE 4.1 – Notations utilisées dans l'étude du lancer de balle.

Nous allons maintenant établir les expressions $x(t)$ et $y(t)$ du corps compte tenu de ces conditions initiales. L'intégration des équations 4.3 et 4.4 donne :

$$v_x = C_x$$
$$v_y = -gt + C_y$$

Où C_x et C_y sont deux constantes d'intégrations. Nous utilisons les conditions initiales de la vitesse pour les déterminer. Nous avons $v_x(t=0) = v_0 \cos(\alpha)$ et $v_y(t=0) = v_0 \sin(\alpha)$ d'où :

$$v_x = v_0 \cos(\alpha)$$
$$v_y = -gt + v_0 \sin(\alpha)$$

La composante verticale de la vitesse est donc positive au début du mouvement (l'altitude de la balle augmente) puis négative (l'altitude de la balle diminue). La balle atteint son altitude maximale lorsque la composante verticale de la vitesse est nulle, soit au temps $t = \frac{v_0 \sin(\alpha)}{g}$. L'intégration des deux équations précédentes conduit à :

$$x = v_0 \cos(\alpha)t + C_x$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t + C_y$$

Où C_x et C_y sont deux constantes d'intégrations. Les conditions initiales de la balle $x(t = 0) = 0$ et $y(t = 0) = 0$ montrent que $C_x = 0$ et $C_y = 0$. Nous obtenons donc les équations horaires du mouvements :

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha)t \qquad (4.5)\\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t \qquad (4.6)\end{aligned}}$$

La vidéo `https://pod.univ-lille.fr/physique-a-main-levee/video/2581-deux-billes-en-chute-libre/` montre la trajectoire simultanée de deux billes en chute libre avec des conditions initiales différentes. La première bille chute avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{u}_x$ (c'est-à-dire $\alpha = 0$ dans les équations précédentes) et la seconde avec une vitesse initiale nulle (c'est-à-dire $v_0 = 0$ dans les équations précédentes). L'équation 4.6 montre alors que $y = -\frac{1}{2}gt^2$ pour les deux billes, ce que confirme l'expérience.

4.2 Équation de la trajectoire

Nous cherchons maintenant à déterminer **la trajectoire** $y(x)$ de la balle.

Point notation

Attention à ne pas confondre les deux expressions. Les équations horaires du mouvement sont données par $x(t)$ et $y(t)$. La trajectoire correspond à l'équation $y(x)$. Pour obtenir la trajectoire, il faut donc éliminer le temps entre les deux équations horaires du mouvement.

Nous injectons l'expression de t obtenue par l'équation 4.5 dans l'équation 4.6. Nous obtenons ainsi :

$$\boxed{y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2(\alpha)} + x\tan(\alpha)} \qquad (4.7)$$

Une balle lancée et soumise uniquement à son propre poids suit donc **une trajectoire parabolique** (voir figure 4.2).

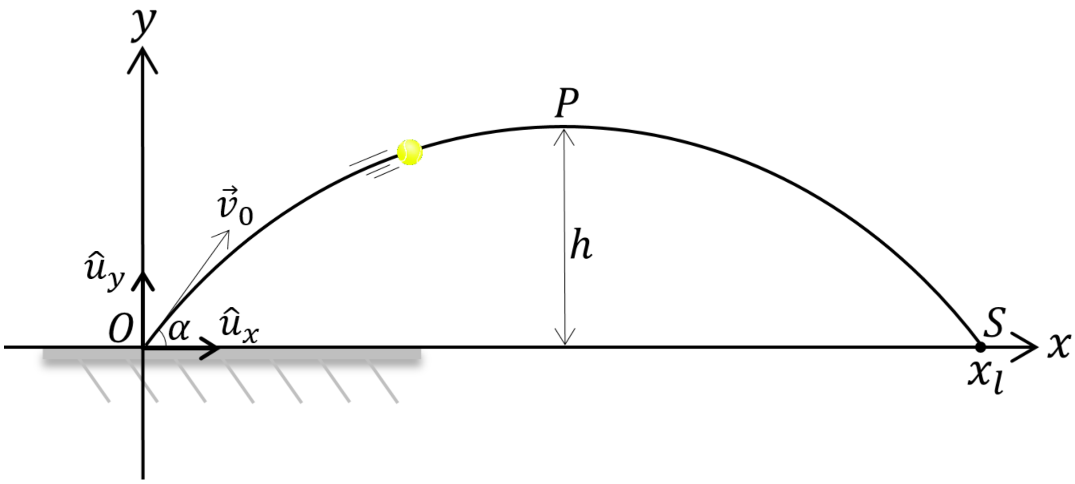

FIGURE 4.2 – Notations utilisées dans l'étude de la trajectoire parabolique.

Vidéo à regarder sur internet

La vidéo `https://www.youtube.com/watch?v=g2OH_tUpQ9k` vous explique le principe d'un vol zéro-g. L'accélération de l'avion est égale à l'accélération de la pesanteur pendant la phase "zero-g", la trajectoire de l'avion est alors parabolique.

4.3 Points remarquables

1. **Longueur maximale :** Nous notons x_l l'abscisse du point d'impact S de la balle sur le sol. Nous pouvons déterminer l'expression x_l en fonction de v_0 et α. Nous avons en effet $y(x_l) = 0$ soit :
$$-\frac{1}{2}\frac{x_l^2}{v_0^2\cos^2(\alpha)} + x_l\tan(\alpha) = 0$$
soit, puisque $x_l \neq 0$:
$$\boxed{x_l = \frac{2}{g}v_0^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = \frac{v_0^2\sin(2\alpha)}{g}} \tag{4.8}$$

Rappel de mathématique

Nous rappelons la formule de trigonométrie $\sin A\cos B = \frac{\sin(A+B)+\sin(A-B)}{2}$.

2. **Hauteur maximale :** Nous pouvons déterminer **la hauteur maximale h atteinte par la balle.** Nous notons P ce point. La composante v_y de la vitesse est nulle au point P, nous avons donc $v_y(t = t_P) = 0$ où t_P est le temps mis par la balle pour atteindre le point P. Nous obtenons donc $-gt_P + v_0\sin(\alpha) = 0$ soit $t_P = \frac{v_0\sin(\alpha)}{g}$. Nous obtenons donc $h = y(t = t_P) = -\frac{1}{2}\frac{(v_0\sin(\alpha))^2}{g} + \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{g}$ soit :
$$\boxed{h = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g}} \tag{4.9}$$

Nous pouvons faire quelques commentaires des expressions 4.8 et 4.9 :

(i)
- h augmente avec v_0.
- h augmente si g diminue. Autrement dit, h augmente si l'intensité des forces d'attraction gravitationnelle diminue.
- h est maximale et égale à $\frac{v_0^2}{2g}$ pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

(ii) v_0 apparait au carré dans x_l et h. Si v_0 double alors la distance parcourue et la hauteur atteinte quadruple.

(iii) x_l est maximale pour $\alpha = \frac{\pi}{4}$ car $x_l = \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$.