Chapitre 3

Position, vitesse et accélération

Objectifs :

- savoir calculer une vitesse et un accélération à partir du vecteur position.
- savoir calculer la vitesse et la position à partir du vecteur accélération.

La position, la vitesse et l'accélération sont des **grandeurs vectorielles** puisque nous pouvons associer une direction et un sens en plus de la valeur à ces grandeurs.

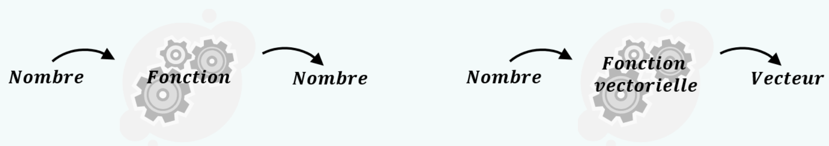
3.1 Le vecteur position

Considérons dans un premier temps une balle posée sur une table. Nous repérons la position de cette balle à l'aide d'un axe Ox. le point M est associé au point de contact entre la balle et la table et le point O est l'origine de l'axe. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ a alors pour expression $\overrightarrow{OM} = x\widehat{u}_x$ où x la position à laquelle se trouve la balle par rapport à l'origine de l'axe.

Nous lançons maintenant cette balle, la position de la balle évolue au cours du temps et elle est maintenant repérée par **la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x$** (figure 3.1).

Le saviez-vous ?

Une fonction est un objet mathématique qui reçoit un nombre en entrée et qui renvoie un nombre en sortie. Une fonction vectorielle est un objet mathématique qui reçoit un nombre en entrée et qui renvoie un vecteur en sortie.



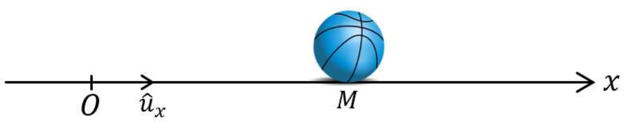


FIGURE 3.1 – La position de la balle est repérée par le vecteur position.

Attention, la fonction scalaire $x(t)$ est la composante du vecteur $\overrightarrow{OM}$ et peut donc retourner **une valeur positive ou négative en fonction de la valeur de t** (figure 3.2).

FIGURE 3.2 – Dans les deux cas, nous avons $\vec{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x$. La composante du vecteur position est positive pour la figure de gauche et négative pour la figure de droite.

Exercice d'application

L'évolution temporelle du vecteur position d'une balle roulant le long d'un axe Ox est donnée par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x = at^2\widehat{u}_x$ avec $a = 0{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ A quelle distance est la balle de l'origine de l'axe à $t = 4\,\mathrm{s}$?

Réponse : $d = 0,6.4^2 = 9{,}6$ m.

3.2 Vecteur vitesse

3.2.1 Vitesse scalaire moyenne

Avant d'introduire la notion de vecteur vitesse, rappelons que la vitesse scalaire moyenne d'un objet entre deux points A et B est la distance parcourue par cet objet entre A et B divisée par le temps du parcours. Nous pouvons donc retenir la formule suivante :

$$\boxed{< v >= \frac{distance\ parcourue}{temps\ du\ parcours}} \tag{3.1}$$

3.2.2 Définition du vecteur vitesse

Supposons que la balle se déplace de la position M_1 à la position M_2. Le vecteur vitesse de la balle est donc dirigée de 1 vers 2. Nous souhaitons calculer ce vecteur vitesse. Nous repartons de la définition de la vitesse mais en utilisant le vecteur position pour faire intervenir **le vecteur déplacement** $\overrightarrow{M_1M_2}$ de la balle entre 1 et 2 à la place de la distance parcourue. Attention, nous calculons le vecteur vitesse de la balle entre 1 et 2, nous calculons donc **un vecteur vitesse moyen** entre ces deux positions noté $< \vec{v} >_{1\to 2}$. En partant de la définition de la vitesse, nous obtenons :

$$< \vec{v} >_{1\to 2} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

En exprimant le vecteur position en fonction du vecteur unitaire, nous obtenons :

$$< \vec{v} >_{1\to 2} = \frac{x_{M_2} - x_{M_1}}{t_2 - t_1} \widehat{u}_x = < v_x > \widehat{u}_x$$

FIGURE 3.3 – Direction du vecteur vitesse moyen de la balle.

Nous voulons maintenant calculer **le vecteur vitesse instantanée** (que nous appellerons tout simplement **le**

vecteur vitesse dans la suite), c'est-à-dire le vecteur vitesse pour un temps t donné.

Pour l'obtenir, nous devons faire tendre t_1 vers t_2, c'est-à-dire faire tendre l'intervalle de temps $\Delta t = t_2 - t_1$ vers zéro. Nous obtenons donc $\vec{v}(t_1) = \lim\limits_{t_2 \to t_1} \frac{\overrightarrow{OM}(t_2) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t_1 + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t_1)}{\Delta t}$. Pour un temps t quelconque, le vecteur vitesse est donc obtenu à partir du vecteur position en effectuant l'opération mathématique suivante :

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$

Cette opération mathématique est appelée **une dérivée du vecteur position par rapport au temps** et nous la notons en physique $\frac{d}{dt}$. Nous obtenons donc la définition suivante de la vitesse :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}} \tag{3.2}$$

La vitesse s'exprime en $\mathrm{m\,s^{-1}}$ dans le système international.

Point notation

Attention à la notation, $\frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ n'est pas une division, $\frac{d}{dt}$ est un opérateur mathématique qui agit sur la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$ et qui renvoie la fonction vectorielle $\vec{v}(t)$. Si l'opérateur $\frac{d}{dt}$ agit sur une fonction scalaire, il renvoie une fonction scalaire.

3.2.3 Le vecteur vitesse à 1D

Lorsqu'un objet se déplace suivant une seule dimension, nous pouvons toujours écrire $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x$ soit, **puisque le vecteur unitaire ne varie pas au cours du temps**, $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\widehat{u}_x = v_x(t)\widehat{u}_x$ où v_x est **la composante de la vitesse suivant l'axe Ox**. Notons bien que la composante de la vitesse peut prendre **une valeur positive ou négative selon la valeur du temps considéré**.

La **vitesse scalaire** correspond à **la norme du vecteur vitesse soit $v = \sqrt{v_x^2}$**. La vitesse scalaire est donc toujours positive.

Rappel de mathématique

Avant de continuer, faisons un petit rappel sur la dérivée. Comme nous allons le voir sur un exemple, la limite du rapport quand Δt tend vers zéro reste finie bien que le dénominateur tende vers zéro. Calculons par exemple la dérivée de la fonction scalaire $x(t) = 4t^2$, nous obtenons $\frac{dx(t)}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{x(\Delta t + t) - x(t)}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{4(t+\Delta t)^2 - 4t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{4(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - 4t^2}{\Delta t} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} (8t + 4\Delta t) = 8t$.

Exercice d'application

L'évolution temporelle du vecteur position d'une balle roulant le long d'un axe Ox est donnée par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x = at^2\widehat{u}_x$ avec $a = 0{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la balle.

Réponse : 1) $\vec{v} = 2at\widehat{u}_x$.

Nous pouvons également effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire que nous pouvons mesurer l'évolution temporelle de la vitesse et déterminer l'évolution temporelle du vecteur position.

Attention, la dérivée d'une constante est nulle, nous allons donc faire apparaitre **une constante** lorsque nous passons de la vitesse à la position à 1D. Cette constante est déterminée grâce à une valeur particulière de la position.

Exercice d'application

L'évolution temporelle du vecteur vitesse d'une balle roulant le long d'un axe Ox est donnée par $\vec{v}(t) = v_x(t)\widehat{u}_x = 4at\widehat{u}_x$ avec $a = 0{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. La balle est à $4\,\mathrm{m}$ de l'origine à $t = 0$.

1. Déterminer l'expression du vecteur position de la balle.

Réponse : 1) $\overrightarrow{OM} = 2at^2\widehat{u}_x + \vec{C}$ où $\vec{C}$ est un vecteur constant. La condition initiale implique $\vec{C} = 4\widehat{u}_x$.

3.2.4 Généralisation

La formule $\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$ établie précédemment ne fait pas appelle à la dimension du mouvement. La formule $\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}$ reste valide quelque la soit la dimension du mouvement du corps considéré.

Dans le cas où le vecteur position est exprimé dans un repère cartésien $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y + z(t)\widehat{u}_z$, nous obtenons $\vec{v}(t) = \frac{dx(t)}{dt}\widehat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\widehat{u}_y + \frac{dz(t)}{dt}\widehat{u}_z = v_x(t)\widehat{u}_x + v_y(t)\widehat{u}_y + v_z(t)\widehat{u}_z$.

La vitesse scalaire est la norme du vecteur vitesse soit $v = \sqrt{\vec{v}.\vec{v}} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$.

Exercice d'application

Imaginons un corps qui se déplace dans un plan. La position du corps en fonction du temps est donnée par le vecteur position $\overrightarrow{OM} = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y + z(t)\widehat{u}_z$ avec $x(t) = t^3$ et $y(t) = 4t$ et $z(t) = 8t$.

1. Quelle est la position du corps à $t = 0$.
2. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$.
3. Déterminer l'expression de la vitesse scalaire.

Réponse : 1) $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. 2) $\vec{v} = 3t^2\widehat{u}_x + 4\widehat{u}_y + 8\widehat{u}_z$. 3) $v = \sqrt{9t^4 + 4^2 + 8^2}$.

3.3 Vecteur accélération

Par définition, **le vecteur accélération** est égal au taux de variation du vecteur vitesse par unité de temps, soit :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}} \tag{3.3}$$

L'accélération s'exprime en $\mathrm{m\,s^{-2}}$ dans le système international.

Notons bien qu'un corps subit une accélération si **la valeur de sa vitesse change mais également si la direction du vecteur vitesse varie au cours du temps**.

L'accélération d'un corps qui se déplace à $\vec{v} = \overrightarrow{cst}$ est nulle. Autrement dit, l'accélération d'un corps qui se déplace avec un mouvement rectiligne uniforme est nulle.

La combinaison des équations 3.2 et 3.3 montre que le vecteur accélération est obtenu à partir du vecteur position en effectuant l'opération :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}(t)}{dt^2}} \tag{3.4}$$

Un peu de calcul !

Imaginons un corps qui se déplace dans un plan. La position du corps en fonction du temps est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\hat{u}_x + y(t)\hat{u}_y$ avec $x(t) = t^2$ et $y(t) = 4t$.

1. Quelle est la position du corps à $t = 0$.
2. Déterminer l'expression de la vitesse $\vec{v}(t)$. Quelle est la norme de la vitesse à $t = 1\,\mathrm{s}$.
3. Déterminer l'accélération $\vec{a}(t)$. Quelle est la valeur de l'accélération à $t = 0$.

Réponse : 1) $\overrightarrow{OM} = \vec{0}$. 2) $\vec{v} = 2t\hat{u}_x + 4\hat{u}_y$. 3) $\vec{a} = 2\hat{u}_x$.

3.4 Application : oscillation d'un bloc-ressort

On considère un bloc accrochée à un ressort de masse négligeable suspendue verticalement. Nous écartons le bloc de sa position d'équilibre d'une distance A puis nous lâchons le bloc sans vitesse initiale. Le bloc se met **à osciller** suivant l'équation :

$$z(t) = A\cos(\omega t) + z_0$$

où z_0 correspond à la position du bloc lorsqu'il est immobile (c'est-à-dire à l'équilibre). La constante ω est la fréquence angulaire du pendule qui est reliée à la période d'oscillation T du pendule par la formule $\omega = 2\pi\frac{1}{T}$.

Puisque la fonction cosinus prend des valeurs comprises entre -1 et 1, la position du bloc oscille entre $z_0 - A$ et $z_0 + A$.

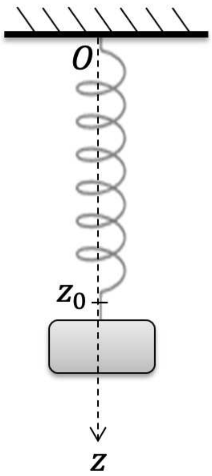


FIGURE 3.4 – Oscillation d'un bloc accroché à un ressort.

La vitesse du bloc est donc donnée par :

$$v_z(t) = -A\omega \sin(\omega t)$$

qui peut s'exprimer en fonction de z à l'aide de l'équation de la position en fonction du temps pour donner :

$$|v_z| = -A\omega\sqrt{1 - \left(\frac{z - z_0}{A}\right)^2}$$

La vitesse est donc maximale en $z = 0$ et est nulle aux extrémités du mouvement d'oscillation en $z = z_0 - A$ et $z = z_0 + A$.

Nous pouvons également déterminer l'expression de l'accélération du bloc au cours du temps. Nous obtenons :

$$a_z(t) = -A\omega^2 \cos(\omega t)$$

Nous remarquons alors que :

$$\boxed{a_z = -\omega^2(z - z_0)} \tag{3.5}$$

L'accélération est donc maximale aux extrémités du mouvement d'oscillation du bloc et est nulle à l'origine en $z = z_0$.

3.5 Composition des vitesses

Nous cherchons dans cette section comment la vitesse d'un corps en mouvement par rapport dans un référentiel R' est mesuré depuis un autre référentiel R sachant que le référentiel R' est en translation rectiligne uniforme à la vitesse $\vec{u}$ par rapport au référentiel R (figure 3.5).

Nous avons $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ d'où :

$$\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$$

où $\vec{u} = \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}$ est la vitesse de translation du point O' par rapport au point O, c'est-à-dire la vitesse de translation du référentiel R' par rapport au référentiel R.

Cette formule représente la composition Galiléenne des vitesses et peut sembler à priori intuitive. En fait, cette formule est fausse. On peut voir que cette formule est fausse car elle ne respecte pas le fait que la vitesse de la lumière est constante quelque soit le référentiel. C'est-à-dire que la mesure de la valeur de la vitesse de la lumière dans le vide vaut toujours c peut importe notre mouvement.

La loi de composition des vitesses qui respecte le fait que c soit une valeur constante quelque soit le référentiel a pour expression :

$$v_x = \frac{u + v'_x}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide. On constate que la composition Galiléenne des vitesses correspond au cas où $u << c$.

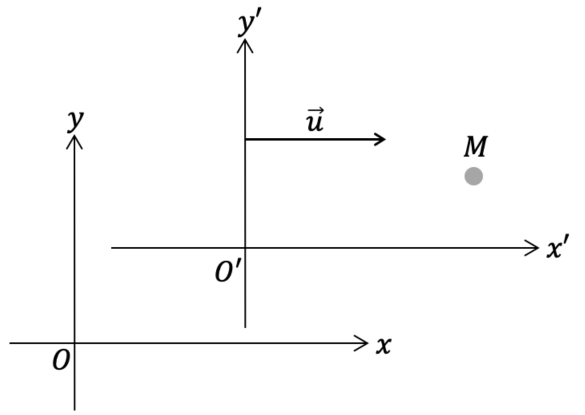


FIGURE 3.5 – Composition des vitesses : un corps repéré par un point M se déplace par rapport à un point O' qui est lui même en mouvement à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à un point O.