# Chapitre 1

# Vecteurs et opérations sur les vecteurs

**Objectifs :**

- savoir additionner graphiquement deux vecteurs.
- savoir calculer les composantes d'un vecteur.
- savoir calculer la norme d'un vecteur.
- savoir projeter une équation vectorielle.

## 1.1 Deux types de grandeurs physiques

Nous utilisons en physique classique deux types de grandeurs physiques pour décrire le réel : **les grandeurs scalaires et les grandeurs vectorielles**.

**Le saviez-vous ?**

les phénomènes quantiques et relativistes ne sont pas décrits par la physique dite classique. Il est nécessaire d'introduire d'autres types d'objets mathématiques plus complexes pour décrire le monde atomique et l'espace-temps.

La masse est un exemple de grandeur scalaire. La vitesse est un exemple de grandeur vectorielle. La vitesse d'un objet est caractérisée par la valeur de sa vitesse mais également par la direction dans laquelle se déplace l'objet. Nous pouvons donc associer une flèche à la notion de vitesse. Autrement dit, la vitesse est décrite mathématiquement par un vecteur.

Nous allons par la suite écrire des relations entre différentes grandeurs physiques. Nous pouvons uniquement égaliser des grandeurs physiques de même nature. Autrement dit, nous devrons toujours avoir des équations du genre :

$$\boxed{\begin{aligned} scalaire &= scalaire \\ vecteur &= vecteur \end{aligned}} \tag{1.1}$$

Les grandeurs physiques que nous pouvons représenter par une flèche sont **des vecteurs notés avec une flèche $\vec{A}$**. La longueur de la flèche associée à un vecteur est **la norme** de ce vecteur. Nous notons $\|\vec{A}\|$ ou $A$ la norme d'un vecteur. Un vecteur de longueur 1 est appelé un **vecteur unitaire** et est généralement noté $\vec{u}$ ou $\vec{e}$ ou $\widehat{u}$ ou $\widehat{e}$.

## 1.2 Opérations élémentaires sur les vecteurs

### 1.2.1 Égalité entre vecteurs

Deux vecteurs sont égaux si leurs **directions et leurs normes sont identiques**. Ainsi, seuls les vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ de la figure 1.1 sont égaux. Les vecteurs $\overrightarrow{A}$,$\overrightarrow{B}$,$\overrightarrow{C}$ et $\overrightarrow{D}$ ont la même norme. Nous pouvons donc écrire $\|\vec{A}\| = \|\vec{B}\| = \|\vec{C}\| = \|\vec{D}\|$.

### 1.2.2 Multiplication d'un vecteur par un scalaire

Une propriété importante des vecteurs est que multiplier par un scalaire un vecteur donne un vecteur. Autrement dit, si $\vec{u}$ est un vecteur et $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\boxed{\vec{v} = \lambda\vec{u}} \tag{1.2}$$

alors $\vec{v}$ est un vecteur. Par exemple, nous avons $\overrightarrow{C} = -\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{E} = 2\overrightarrow{A}$.

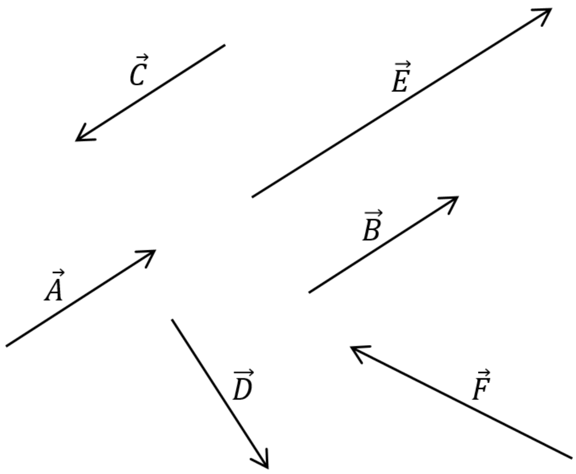



FIGURE 1.1 – Les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont égaux.

### 1.2.3 Addition de vecteurs

Une autre propriété importante des vecteur est que la somme de deux vecteurs est un vecteur. Autrement dit, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs alors :

$$\boxed{\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}} \tag{1.3}$$

est un vecteur.

Supposons que nous souhaitions additionner les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ de la figure 1.2.

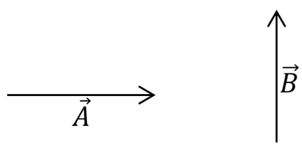



FIGURE 1.2 – Deux vecteurs quelconques $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Soit $\vec{R}$ le vecteur résultant de l'addition de vecteurs. Le vecteur $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$ résultant de l'addition des deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est la diagonale du parallélogramme formé par les **deux vecteurs additionnés mis bout à bout** comme le montre la figure 1.3.

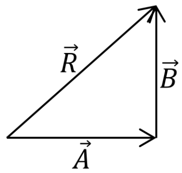



FIGURE 1.3 – Addition graphique de deux vecteurs.

Étant donné que des vecteurs de même direction et de même norme sont identiques, les trois situations montrées sur la figure 1.3 sont équivalentes.

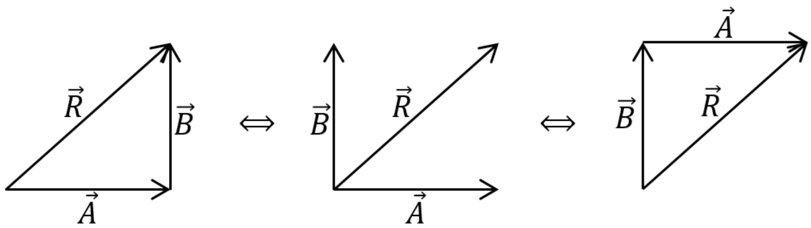



FIGURE 1.4 – Addition de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. Les trois situations sont équivalentes.

Notons que nous pouvons montrer graphiquement que l'addition de vecteurs est associatif. C'est-à-dire que $\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}$. L'addition de deux vecteurs de sens opposé et de même norme est égale au **vecteur nul** noté $\vec{0}$. C'est-à-dire que $\vec{A} - \vec{A} = \vec{0}$. La figure 1.5 montre que $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \vec{E} + \vec{F} + \vec{G} = \vec{0}$ puisque tous les vecteurs mis bout à bout se rejoignent et forment donc un vecteur de longueur nulle. C'est par définition le vecteur nul.

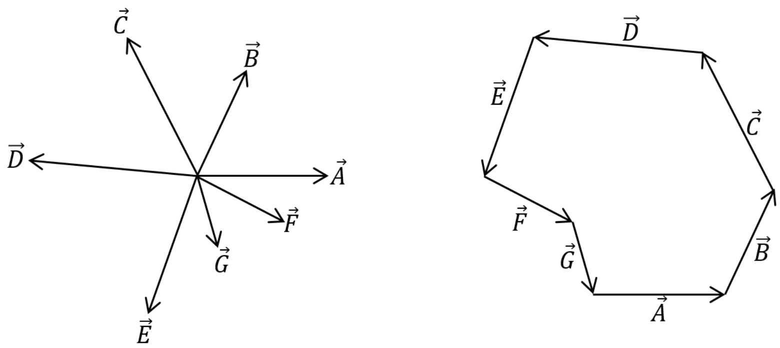



FIGURE 1.5 – La somme de tous ces vecteurs est égale au vecteur nul.

### 1.2.4 Soustraction de vecteurs

La soustraction de deux vecteurs se déduit de l'addition de deux vecteurs en remarquant que $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$. La résultante $\vec{R}$ de la soustraction des deux vecteurs de la figure 1.2 se détermine donc en suivant la procédure de la figure 1.6. Le vecteur $\vec{R}$ part de la pointe de la flèche représentant le deuxième vecteur pour rejoindre le début du premier vecteur.

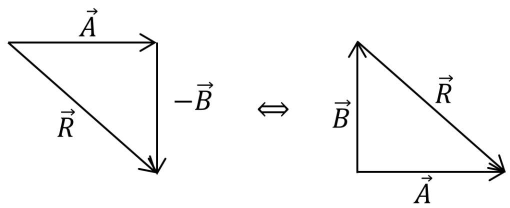



FIGURE 1.6 – La somme de tous ces vecteurs est égale au vecteur nul.

## 1.3 Comment repérer un point dans l'espace et exprimer les composantes des vecteurs ?

### 1.3.1 Notion de repère

Nous allons introduire la notion de repère pour pourvoir **repérer la position dans l'espace des objets** qui nous entoure mais également pour pouvoir exprimer **les composantes des grandeurs physiques** représentées par des vecteurs.

**Exemple**

Supposons que nous souhaitions repérer la position de ce symbole ♣ sur la feuille. Comment procéder ? Nous devons tout d'abord définir une origine, le coin en bas à gauche de la feuille par exemple. Nous devons ensuite prendre deux axes. Un le long de la hauteur de la feuille et un autre le long de la largeur de la feuille. Nous pouvons ainsi dire que ce trêfle est à 10 cm de haut et 15 cm vers la droite. Cependant, nous ne pourrons faire aucun calcul si nous utilisons une façon aussi peu abstraite de repérer un point. Nous allons donc repérer la position du trêfle à l'aide d'un vecteur position $\overrightarrow{OM}$ que nous allons exprimer en fonction des vecteurs unitaires $\widehat{u}_x$ et $\widehat{u}_y$ le long des axes. Ainsi, dans l'exemple de la figure 1.8 (a), le vecteur position du trêfle a pour expression, en utilisant la règle d'addition des vecteurs, $\overrightarrow{OM} = 3\widehat{u}_x + 4\widehat{u}_y$.

**Un repère** est constitué **d'une origine et de trois axes orthogonaux** à partir desquels nous repérons la position d'un point. A chacun de ces axes est associé **un vecteur unitaire**. Les trois vecteurs unitaires forment **une base** grâce à laquelle nous pouvons exprimer les différentes composantes d'un vecteur.

Une base est donc un ensemble de trois vecteurs unitaires orthogonaux. Attention, pour pouvoir calculer les produits scalaires et vectoriels, nous devons prendre des **bases orthonormés directes**. C'est-à-dire, que les trois vecteurs unitaires doivent respecter la règle de la main droite.

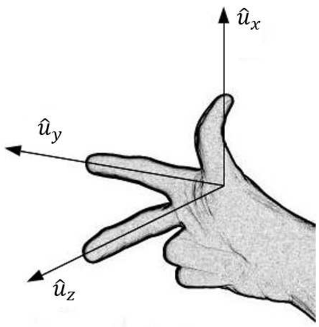



FIGURE 1.7 – Règle de la main droite.

Le choix du nombre de vecteurs unitaires et leurs orientations dépend de la géométrie du système physique utilisé.

Prenons l'exemple de la figure 1.8 (b). Pour repérer la position du point $M$, nous choisissons dans un premier temps une origine $O$ et des vecteurs unitaires $\widehat{u}_x$ et $\widehat{u}_y$. Nous avons alors défini un repère cartésien à deux dimensions. Nous pouvons également dire que nous utilisons un **système de coordonnées cartésiennes.** Le point $M$ est alors repéré par le **vecteur position** $\overrightarrow{OM}$ qui a pour expression $\overrightarrow{OM} = 3\widehat{u}_x + 4\widehat{u}_y$. Les valeurs 3 et 4 représentent les **composantes du vecteur**. Nous pouvons également noter un vecteur en écrivant **les composantes du vecteurs en colonne**. Ainsi, nous avons $\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

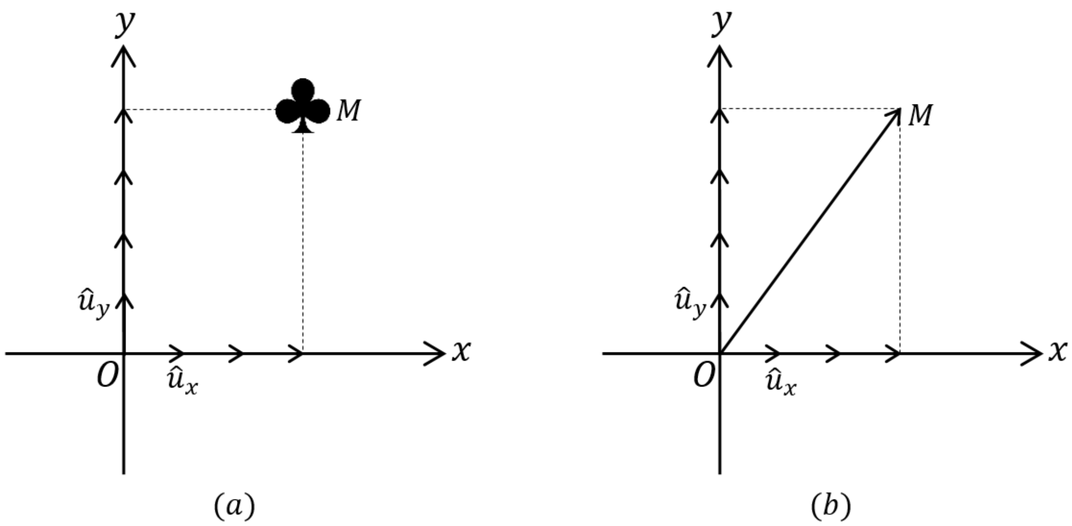



FIGURE 1.8 – Vecteur position qui permet de repérer la position du trèfle dans l'espace.

Les **composantes sont des grandeurs algébriques**, c'est-à-dire que les valeurs numériques peuvent être positives ou négatives. Ainsi, le vecteur position tracé dans la figure 1.9 a pour composantes $x = -3$ et $y = 4$.

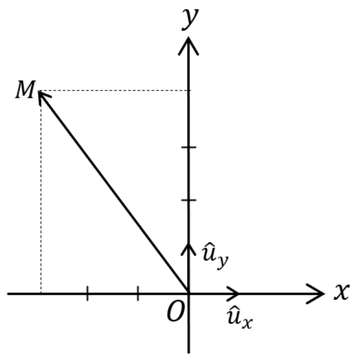



FIGURE 1.9 – Vecteur position qui permet de repérer la position d'un point dans l'espace.

Nous verrons dans le cours de mécanique les différents systèmes de coordonnées qui servent à repérer un point dans l'espace en physique. Pour l'instant, nous allons utiliser uniquement le système de coordonnées cartésien.

### 1.3.2 Norme d'un vecteur

La figure 1.10 montre que le théorème de pythagore permet d'exprimer la norme du vecteur en fonction de ces composantes. Nous avons $\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}$ qui s'écrit à trois dimensions :

$$\boxed{\|\vec{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}} \tag{1.4}$$

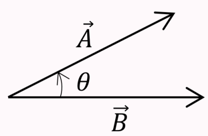
### 1.3.3 Projection d'un vecteur sur un axe

Soit $\vec{A}$ un vecteur dans un espace à deux dimensions dont nous repérons les points à l'aide d'une repère cartésien. Ce vecteur $\vec{A}$ possède donc trois composantes que nous écrivons $\vec{A} = A_x\widehat{u}_x + A_y\widehat{u}_y$. Si nous voulons obtenir la composante $A_x$ de ce vecteur à partir du vecteur $\vec{A}$, nous devons utiliser le produit scalaire et faire l'opération :

$$\begin{aligned}\vec{A}.\widehat{u}_x &= A_x\widehat{u}_x.\widehat{u}_x + A_y\widehat{u}_y.\widehat{u}_x \\ &= A_x\end{aligned}$$

**Rappel de mathématique**

La produit scalaire de deux vecteurs peut s'exprimer en fonction de l'angle entre les deux vecteurs mais également en fonction des composantes des deux vecteurs. Exprimer en fonction de l'angle, le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ a pour expression $\vec{A}.\vec{B} = AB\cos\theta$.




Nous en déduisons donc que :

$$\begin{aligned}A_x &= \vec{A}.\widehat{u}_x \\ A_y &= \vec{A}.\widehat{u}_y\end{aligned}$$

Si nous notons $\theta$ l'angle entre le vecteur $\vec{A}$ et l'axe $Ox$, nous avons alors :

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1.5) \\ (1.6) \end{aligned}$$

Cela étant dit, nous allons concrètement plutôt utiliser une méthode graphique qui utilise les schémas pour déterminer les composantes d'un vecteur. La règle est en fait très simple. Par exemple, la figure suivante montre les composantes du vecteur $\vec{A}$ suivant les axes $Ox$ et $Oy$. Les formules de trigonométries nous montrent alors que $A_x = A\cos\theta$ et $A_y = A\sin\theta$.

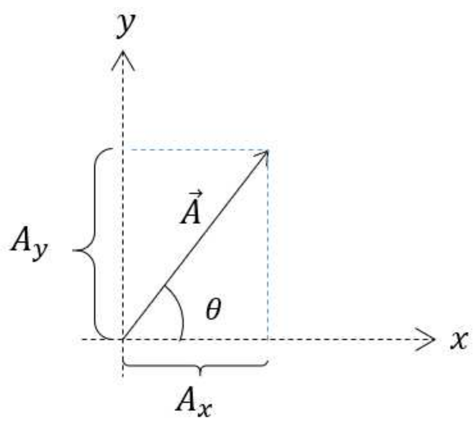



FIGURE 1.10 – Composantes du vecteur $\vec{A}$ dans un repère cartésien à deux dimensions.

Lorsque l'angle $\theta$ est plus grand que $\frac{\pi}{2}$ la valeur de $\cos\theta$ devient négative ce qui montre que la composante $A_x$ devient négative. Nous allons cependant utiliser pour simplifier des angles inférieur à $\frac{\pi}{2}$ sur nos schémas et ajouter à la main les signes négatifs en fonction de l'orientation des vecteurs par rapport aux sens des vecteurs unitaires. Ainsi, les composantes du vecteur $\vec{A}$ représenté dans la figure 1.11 ont pour expression :

$$\boxed{\begin{aligned} A_x &= -A\cos\theta \\ A_y &= A\sin\theta \end{aligned}} \qquad \begin{aligned} (1.7) \\ (1.8) \end{aligned}$$

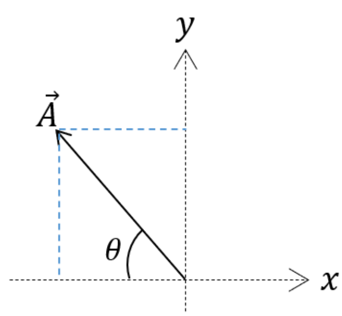



FIGURE 1.11 – Vecteur $\vec{A}$ dans un repère cartésien à deux dimensions.

## 1.4 Équation vectorielle

Une égalité entre vecteurs s'appelle **une équation vectorielle**. Projeter une équation vectorielle revient donc à faire le produit scalaire de cette équation avec un vecteur unitaire orienté suivant l'axe sur lequel nous faisons notre projection.

Plus simplement, nous allons projeter une équation vectorielle en projetant chaque vecteur à l'aide de la méthode utilisant le schéma des vecteurs détaillés précédemment. C'est-à-dire que nous allons utiliser des angles inférieur à $\frac{\pi}{2}$ et rajouter les signes négatifs lorsque le vecteur est dans le sens inverse du vecteur unitaire.

La figure 1.12 montre trois forces qui s'exercent sur un anneau telles que $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = \vec{0}$. Dans un repère à deux dimensions, la projection de cette équation vectorielle sur les axes $Ox$ et $Oy$ produit 2 équations scalaires qui ont pour expression :

$$T_1 - T_3 \cos(25) = 0 \tag{1.9}$$
$$T_2 - T_3 \sin(25) = 0 \tag{1.10}$$

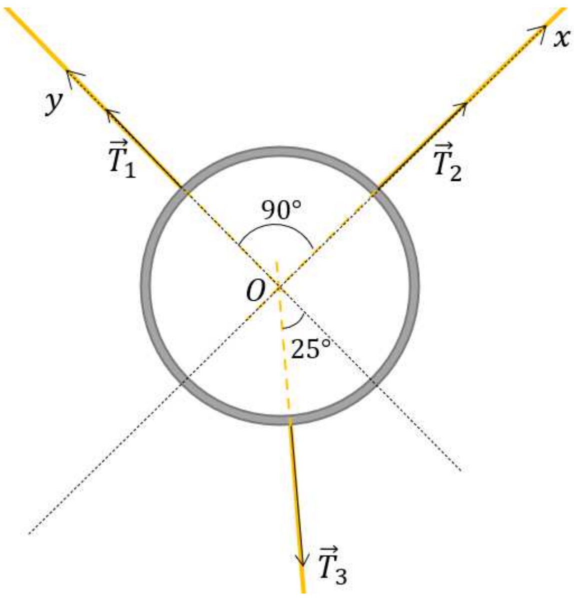



FIGURE 1.12 – Les forces qui s'exercent sur l'anneau sont telles que $\vec{T_1} + \vec{T_2} + \vec{T_3} = \vec{0}$.