
UE914

MODÉLISATION DES SYSTÈMES MOBILES

LAMRI.NEHAOUA

LAMRI.NEHAOUA@UNIV-EVRY.FR

UNIVERSITÉ D'EVRY PARIS-SACLAY

Table of Contents

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Cinématique et Dynamique | 5 |
| 1 | Introduction | 5 |
| 2 | Cinématique d'un corps | 6 |
| 2.1 | Position | 7 |
| 2.2 | Vitesses | 7 |
| 2.3 | Accélération | 8 |
| 3 | Système multi-corps | 9 |
| 3.1 | Coordonnées dépendantes et indépendantes | 10 |
| 3.2 | Coordonnées généralisées | 11 |
| 3.3 | Contraintes cinématiques | 11 |
| 4 | Matrice de projection | 12 |
| 4.1 | Matrice de rotation | 12 |
| 4.2 | Matrice de transformation vitesse angulaire | 12 |
| 5 | Dynamique d'un corps | 13 |
| 5.1 | Principe de Newton-Euler | 13 |
| 5.2 | Principe de Jourdain: puissances virtuelles | 15 |
| 5.3 | Exemple | 16 |
| 2 | Exercices | 19 |
| 1 | Dynamique du véhicule | 19 |
| 1.1 | Modèle véhicule bicyclette | 19 |
| 1.2 | Équations symboliques | 26 |
| 1.3 | Modèle linéaire avec une vitesse constante | 28 |
| 1.4 | Modèle linéaire avec une vitesse variable | 31 |
| 1.5 | Travail à faire | 35 |
| 2 | Dynamique verticale | 37 |
| 2.1 | Quarter model | 37 |
| 2.2 | Half model | 38 |
| 3 | Dynamique longitudinale | 40 |
| 4 | Véhicule deux-roues | 41 |
| 3 | Travaux pratiques | 45 |

1 Sujet 1: Dynamique véhicule 45

Chapter 1

Cinématique et Dynamique

1 Introduction

L'objectif de la modélisation est de prédire et d'étudier le comportement d'un système. La modélisation des systèmes mécaniques permet d'aboutir à une représentation mathématique de la dynamique d'un système et conduit généralement à un ensemble d'équations algèbro-différentielles issues des lois de la mécanique. Plusieurs approches de modélisation existent:

- approche analytique: utilise une bibliothèque mathématique, à travers des logiciels de calcul algébriques tels que Mathematica ou Maple, pour aboutir d'une manière symbolique les équations du mouvement.
- approche numérique: utilise des outils numériques pour analyser le comportement cinématique et dynamique d'un système. Parmi ces outils on trouve Msc Adams, langage Modelica (utilisé dans des logiciels comme Dymola et AmeSim) ou simScape (une toolbox de Matlab).

Les problèmes de la cinématique sont ceux dans lesquels la position ou le mouvement du système multi-corps sont étudiés, quelles que soient les forces et les réactions qui le génèrent. Les problèmes cinématiques sont de nature purement géométrique et peuvent être résolus, indépendamment non seulement des forces mais aussi des caractéristiques d'inertie des éléments tels que la masse, les moments d'inertie et la position du centre de gravité.

Les problèmes de la dynamique sont beaucoup plus compliqués à résoudre que les problèmes de la cinématique. Les problèmes cinématiques doivent être résolus avant les problèmes dynamiques. La caractéristique exceptionnelle des problèmes dynamiques est qu'ils impliquent les forces qui agissent sur le système multi-corps et ses caractéristiques inertielles : masse, tenseur d'inertie et position de son centre de gravité. Les problèmes de la dynamique les plus importants rencontrés dans la pratique:

- **Position d'équilibre statique:** consiste à déterminer la position du système dans lequel toutes les forces gravitationnelles et externes, les forces élastiques dans les ressorts et les réactions externes sont équilibrées. Ce problème n'est pas vraiment

un problème dynamique, mais un problème statique, qui dépend du poids et de la position du centre de gravité du système multi-corps et non de ses propriétés d'inertie. Le problème de la détermination de la position d'équilibre statique se pose très fréquemment dans les véhicules à suspension à ressorts. La solution générale à ce problème conduit également à un système d'équations non linéaires qui doivent être résolues itérativement.

- **Dynamique linéarisée:** un problème étroitement lié au précédent est celui de déterminer les modes de vibration naturelle et les fréquences des petites oscillations qui se produisent autour de la position d'équilibre statique (ou dynamique). Ce problème est résolu en linéarisant d'abord les équations de mouvement à une position particulière, puis en effectuant une analyse chronologique étape par étape ou une analyse de valeur propre. Ce problème permet de concevoir différentes lois de contrôle.
- **Dynamique inverse:** vise à déterminer les forces/moments qui produisent un mouvement spécifique, ainsi que les réactions qui apparaissent à chacune des articulations du système multi-corps. Il est nécessaire de connaître les vitesses et les accélérations pour pouvoir estimer les forces d'inertie qui, avec le poids, les forces dans les ressorts et les amortisseurs et toutes les autres forces externes connues, serviront de base pour calculer les forces d'actionnement requises. La dynamique inverse donne les forces motrices nécessaires pour contrôler un système de sorte qu'il suit une trajectoire désirée.
- **Dynamique directe:** ce problème produit le mouvement d'un système multi-corps sur un intervalle de temps donné, en conséquence des forces appliquées et des conditions initiales données. L'importance de ce problème réside dans le fait qu'il permet de simuler et de prédire le comportement réel du système; le mouvement est toujours le résultat des forces qui le produisent. La dynamique directe implique la solution d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaires. Ces équations différentielles sont numériquement intégrées à partir des conditions initiales. Une caractéristique importante de ce problème mathématique est qu'il est intensif en calcul. Pour cette raison, il est très important de choisir la méthode la plus efficace pour traiter et résoudre ce problème. Les résultats du problème de simulation dynamique peuvent être affichés numériquement, ou ils peuvent être représentés graphiquement au moyen d'un traceur d'un terminal graphique de la même manière qu'avec les résultats de la simulation cinématique.

2 Cinématique d'un corps

Les systèmes mécaniques peuvent être composés par des corps rigides et/ou élastiques pouvant se déplacer l'un par rapport à l'autre, en fonction de la façon dont ils sont in-

terconnectés par des composants tels que des liaisons, des amortisseurs et d'autres dispositifs passifs.

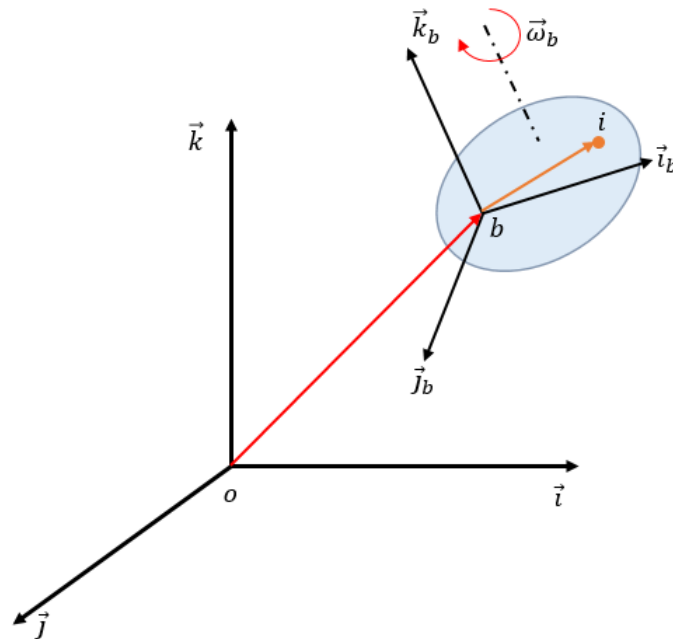


Figure 1.1: Vecteur de position d'un point d'un corps solide.

2.1 Position

On définit un repère absolu fixe $R_o(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Ensuite, on définit un repère corps mobile (*body-frame*) $R_b(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$.

Dans R_b , la position du point i par rapport à b :

$$r_{bi}^b = \text{constante} \rightarrow \dot{r}_{bi}^b = \vec{0}$$

Dans le repère absolu $R_o(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la position du point i par rapport à b :

$$r_{bi}^o = \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b$$

où \mathcal{R}_o^b : matrice de projection de repère mobile R_b vers le repère fixe R_o .

2.2 Vitesses

Dans le repère mobile $R_b(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$, la vitesse angulaire du point i est exprimée par $\omega_i^b = \omega_b^b$. La vitesse angulaire de point i par rapport à b est $\omega_{bi} = \vec{0}$. La vitesse linéaire du point i est alors $v_i^b \neq v_b^b$. En effet, dans le repère absolu R_o :

$$r_{bi}^o = \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b \rightarrow v_{bi}^o = \dot{\mathcal{R}}_o^b r_{bi}^b + \underbrace{\mathcal{R}_o^b \dot{r}_{bi}^b}_{=0}$$

Mais $\dot{\mathcal{R}}_o^b$?

$$\underbrace{\dot{\mathcal{R}}_o^b}_{\text{matrice } 3 \times 3} \underbrace{r}_{\text{vecteur } 3 \times 1} = \underbrace{S(\omega_{ob})}_{\text{matrice } 3 \times 3} \underbrace{r}_{\text{vecteur } 3 \times 1} = \underbrace{\omega_{ob}}_{\text{vecteur } 3 \times 1} \wedge \underbrace{r}_{\text{vecteur } 3 \times 1}$$

où $S(\omega)$ est appelée matrice anti-symétrique (*skew-matrix*):

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \text{ et } S^T(\omega) = -S(\omega)$$

Donc, si ω_{ob} est le vecteur de vitesse angulaire induit par une combinaison de rotations, la vitesse linéaire du point i , dans le repère absolu R_o :

$$v_{bi}^o = \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b$$

Maintenant, on peut exprimer la vitesse du point i du corps b par rapport au point o . La position:

$$r_{oi}^o = r_{ob}^o + \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b \rightarrow v_{oi}^o = v_{ob}^o + \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b$$

La vitesse dans le repère mobile R_b est obtenue par une simple projection inverse $\mathcal{R}_b^o = \mathcal{R}_o^b^{-1}$:

$$v_{oi}^b = \mathcal{R}_b^o \left(v_{ob}^o + \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b \right) \rightarrow v_{oi}^b = v_{ob}^b + \omega_{ob}^b \wedge r_{bi}^b$$

2.3 Accélération

$$\begin{aligned} v_{oi}^o = v_{ob}^o + \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b &\rightarrow a_{oi}^o = \dot{v}_{ob}^o + \dot{\omega}_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b + \omega_{ob}^o \wedge (\dot{\mathcal{R}}_o^b r_{bi}^b) \\ &= \dot{v}_{ob}^o + \dot{\omega}_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b + \omega_{ob}^o \wedge (\omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b r_{bi}^b) \end{aligned}$$

L'accélération dans le repère mobile R_b est obtenue par une simple projection inverse $\mathcal{R}_b^o = \mathcal{R}_o^b^{-1}$:

$$a_{oi}^b = \mathcal{R}_b^o \dot{v}_{ob}^o + \dot{\omega}_{ob}^b \wedge r_{bi}^b + \omega_{ob}^b \wedge (\omega_{ob}^b \wedge r_{bi}^b)$$

De même, on peut calculer l'accélération angulaire notée ϵ_{oi} en dérivant le vecteur de la vitesse angulaire:

$$\omega_{oi}^o = \omega_{ob}^o + \underbrace{\omega_{bi}^o}_{=0} \rightarrow \omega_{oi}^o = \omega_{ob}^o \rightarrow \epsilon_{oi}^o = \dot{\omega}_{ob}^o \rightarrow \epsilon_{oi}^b = \mathcal{R}_b^o \dot{\omega}_{ob}^o$$

Si on note $\mathcal{R}_b^o \dot{v}_{ob}^o = a_{ob}^b$ et $\mathcal{R}_b^o \dot{\omega}_{ob}^o = \epsilon_{ob}^b$ donc:

$$\begin{aligned} a_{oi}^b &= a_{ob}^b + \dot{\omega}_{ob}^b \wedge r_{bi}^b + \omega_{ob}^b \wedge (\omega_{ob}^b \wedge r_{bi}^b) \\ \epsilon_{oi}^b &= \epsilon_{ob}^b \end{aligned}$$

Mais dans le repère R_b , $a_{ob}^b = ?$ et $\epsilon_{ob}^b = ?$ Dans le repère R_o :

$$\begin{aligned} v_{ob}^o &= \mathcal{R}_o^b v_{ob}^b \rightarrow a_{ob}^o = \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b v_{ob}^b + \mathcal{R}_o^b \dot{v}_{ob}^b \rightarrow a_{ob}^b = \omega_{ob}^b \wedge v_{ob}^b + \dot{v}_{ob}^b \\ \omega_{ob}^o &= \mathcal{R}_o^b \omega_{ob}^b \rightarrow \epsilon_{ob}^o = \omega_{ob}^o \wedge \mathcal{R}_o^b \omega_{ob}^o + \mathcal{R}_o^b \dot{\omega}_{ob}^o \rightarrow \epsilon_{ob}^b = \dot{\omega}_{ob}^b \end{aligned}$$

Pour résumé cette section, si un point i appartient à un solide muni d'un repère local R_b dont l'origine est le point b . Dans le repère local, on a les équations suivantes de la cinématique:

$$v_{oi} = v_{ob} + \omega_{ob} \wedge r_{bi} \quad (1.1)$$

$$\omega_{oi} = \omega_{ob} \quad (1.2)$$

$$a_{oi} = \dot{v}_{ob} + \epsilon_{ob} \wedge r_{bi} + \omega_{ob} \wedge v_{oi} \quad (1.3)$$

$$\epsilon_{oi} = \dot{\omega}_{ob} \quad (1.4)$$

3 Système multi-corps

Un système multi-corps est défini comme un assemblage de deux ou plusieurs corps rigides imparfaitement liés, ayant la possibilité d'un mouvement relatif entre eux. Cette liaison imparfaite des deux corps rigides constituant un système multi-corps s'appelle une paire ou articulation cinématique, ou simplement une articulation. Une liaison permet certains degrés de liberté de mouvement relatif et prévient ou restreint les autres. Les systèmes multi-corps sont classés en tant que systèmes à chaîne ouverte ou à chaîne fermée. Si un système est composé de corps sans branches (ou boucles) fermées, on parle alors de système à chaîne ouverte; sinon, on l'appelle un multi-corps à chaîne fermée. Un double pendule et un système de type arbre sont de bons exemples de configuration à chaîne ouverte.

si $i \notin$ au solide B mais à un autre solide, donc dans le repère R_b :

$$r_{oi} = r_{ob} + \mathcal{R}_{ob} r_{bi}^i$$

$$v_{oi} = v_{ob} + \omega_{ob} \wedge r_{bi} + \dot{r}_{bi}$$

$$a_{oi} = a_{ob} + \epsilon_{ob} \wedge r_{bi} + \omega_{ob} \wedge (\omega_{ob} \wedge r_{bi} + \dot{r}_{bi}) + \omega_{ob} \wedge \dot{r}_{bi} + \ddot{r}_{bi}$$

$$\omega_{oi} = \omega_{ob} + \omega_{bi}$$

$$\epsilon_{ob} = \dot{\omega}_{ob} + \dot{\omega}_{bi} + \omega_{ob} \wedge \omega_{bi}$$

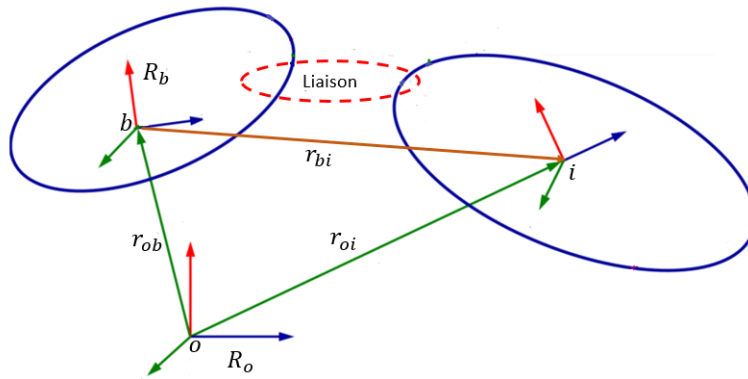


Figure 1.2: Système multi-corps ou *multibody*.

Ensuite, il s'agit de déterminer l'accélération linéaire et angulaire, a_{ob} et ϵ_{ob} , de repère mobile R_b . Dans le repère global:

$$v_{ob} = \mathcal{R}_{ob} v_{ob}^v \rightarrow a_{ov} = \omega_{ov} \wedge v_{ob} + \dot{v}_{ob}$$

$$\omega_{ob} = \mathcal{R}_{ob} \omega_{ob}^v \rightarrow \epsilon_{ob} = \omega_{ob} \times \omega_{ov} + \dot{\omega}_{ov}$$

Résumé: les équations de la cinématique d'un point i appartenant à un système multi-corps dans le repère local:

$$\begin{aligned}v_{oi} &= v_{ob} + \omega_{ob} \wedge r_{bi} + \dot{r}_{bi} \\ \omega_{oi} &= \omega_{ob} + \omega_{bi} \\ a_{oi} &= \dot{v}_{ob} + \epsilon_{ob} \wedge r_{bi} + \ddot{r}_{bi} + \omega_{ob} \wedge (\dot{r}_{bi} + v_{oi}) \\ \epsilon_{oi} &= \dot{\omega}_{ob} + \omega_{ob} \wedge \omega_{bi} + \dot{\omega}_{bi}\end{aligned}$$

3.1 Coordonnées dépendantes et indépendantes

Afin de décrire un système multi-corps, le premier point important à considérer est celui du choix d'une méthode ou d'un modèle mathématique qui décrira sa position et son mouvement. En d'autres termes, sélectionner un ensemble de paramètres ou de coordonnées qui permettront de définir sans équivoque la position, la vitesse et l'accélération du système multi-corps à tout moment. Même si un système multi-corps peut être décrit avec différents types de coordonnées, cela ne signifie pas qu'ils sont tous équivalents dans la mesure où ils permettent des formulations aussi efficaces ou faciles à mettre en oeuvre.

Par conséquent, le premier problème rencontré lors de la modélisation du mouvement d'un système multi-corps est celui de trouver un système de coordonnées approprié. Un premier choix est celui d'utiliser un système de coordonnées indépendantes, dont le nombre coïncide avec le nombre de degrés de liberté de mouvement et est donc minimal. Le deuxième choix consiste à adopter un système élargi de coordonnées dépendantes en un nombre plus grand que celui des degrés de liberté, qui peut décrire le système multi-corps beaucoup plus facilement mais qui ne sont pas indépendants mais reliés entre elles par des équations de contraintes. Le nombre de contraintes est égal à la différence entre le nombre de coordonnées dépendantes et le nombre de degrés de liberté. Les équations de contraintes sont généralement non linéaires et jouent un rôle principal dans la cinématique et la dynamique des systèmes multi-corps.

Les études sur ce sujet ont tendance à conclure que les coordonnées indépendantes ne sont pas une solution appropriée pour une analyse générale, car elles ne répondent pas à l'une des exigences les plus importantes: le système de coordonnées doit définir sans équivoque la position du système multi-corps. Les coordonnées indépendantes déterminent directement la position des corps d'entrée ou la valeur des coordonnées externes, mais pas la position de l'ensemble du système. Pour certaines applications particulières, des coordonnées indépendantes peuvent être très utiles pour décrire avec un minimum de données les vitesses ou accélérations réelles et les petites variations de la position. En outre, ils peuvent conduire à l'efficacité de calcul la plus élevée.

Pour les cas généraux, le choix alternatif à l'ensemble indépendant de coordonnées est un système de coordonnées dépendantes, qui déterminent de façon unique la position de tous les corps. Trois grands types de coordonnées ont été proposés pour résoudre ce problème: les coordonnées relatives, les coordonnées cartésiennes, et coordonnées

naturelles ou entièrement cartésiennes. Ces derniers sont les plus fréquemment utilisés.

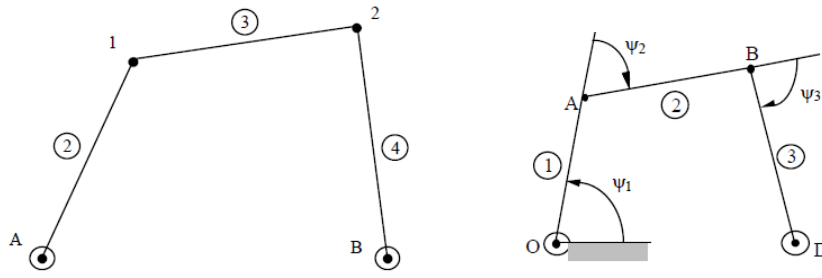


Figure 1.3: Représentation en coordonnées naturelles, c-à-d, coordonnées cartésiennes. Représentation en coordonnées relatives.

Dans l'exemple de la figure ci-dessus, l'utilisation des coordonnées naturelles doit inclure les 4 coordonnées dépendantes (x_1, x_2, y_1, y_2) , sachant que le mécanisme présente seulement 1 DDL. Donc, il doit y avoir 3 équations de contraintes:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_A)^2 + (y_1 - y_A)^2 - L_2^2 &= 0 \\(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - L_3^2 &= 0 \\(x_2 - x_B)^2 + (y_2 - y_B)^2 - L_4^2 &= 0\end{aligned}$$

3.2 Coordonnées généralisées

La configuration d'un système multi-corps est identifiée par un ensemble de variables appelées coordonnées généralisées qui définissent complètement l'emplacement et l'orientation de chaque corps dans le système. La configuration d'un corps rigide peut être complètement décrite en utilisant six coordonnées indépendantes: trois coordonnées décrivant l'emplacement de l'origine du repère local et trois coordonnées de rotation décrivant l'orientation du corps par rapport à un repère inertiel. Une fois cet ensemble de coordonnées identifié, la position globale d'un point arbitraire du corps peut être exprimée en termes de ces coordonnées.

Un système multi-corps de n_b corps rigides interconnectés, nécessite $6n_b$ coordonnées pour décrire la configuration du système dans l'espace. Ces coordonnées généralisées, cependant, ne sont pas totalement indépendantes à cause des liaisons mécaniques entre les corps adjacents. Le mouvement de chaque composante dans le système est influencé par le mouvement des autres à travers les contraintes cinématiques qui relient les coordonnées et les vitesses généralisées. Pour comprendre et contrôler le mouvement du système multi-corps, il est important d'identifier un ensemble de coordonnées généralisées indépendantes appelées degrés de liberté.

3.3 Contraintes cinématiques

On considère un ensemble q de n coordonnées généralisées tel que $q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$. On considère aussi que le nombre de DDL est de N . Si $n > N$ donc il existe n_c équations

de contraintes tel que $n_c = n - N$. Si les n_c équations de contraintes peuvent se mettre sous la forme:

$$C(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = C(q, t) = 0$$

alors les contraintes C sont appelées holonomes. Sinon, elles sont non-holonomes comme la contrainte de la forme $a_0 + B\dot{q} = 0$.

Les contraintes holonomes imposent des restrictions au mouvement possible des corps individuels dans le système mécanique, tandis que les contraintes non-holonomiques restreignent les valeurs cinématiquement possibles des vitesses des corps dans le système. Il est clair que toute contrainte holonomique engendre en même temps une certaine contrainte cinématique sur les vitesses. L'inverse, cependant, n'est pas vrai; c'est-à-dire que les contraintes non intégrables sur les vitesses du système n'impliquent pas nécessairement des restrictions sur les coordonnées du système. Par conséquent, dans un système non-holonyme, certaines coordonnées peuvent être indépendantes, mais leurs variations sont dépendantes.

4 Matrice de projection

4.1 Matrice de rotation

En utilisant la convention de rotations ZYX : $R_o(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\psi/\vec{k}} R_1(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1) \xrightarrow{\theta/\vec{j}_1} R_2(\vec{i}_2, \vec{j}_2, \vec{k}_2) \xrightarrow{\varphi/\vec{i}_2} R_b(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$, la matrice de projection des rotations est donnée par:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_o^b &= \mathcal{R}_\psi \mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\varphi \\ &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & s\varphi & c\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} c\psi c\theta & c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi & c\psi s\theta c\varphi + s\psi s\varphi \\ s\psi c\theta & s\psi s\theta s\varphi + c\psi c\varphi & s\psi s\theta c\varphi - c\psi s\varphi \\ -s\theta & c\theta s\varphi & c\theta c\varphi \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4.2 Matrice de transformation vitesse angulaire

La vitesse angulaire ω_{ob} dans le repère mobile R_b et dans le repère absolu R_o :

$$\omega_{ob}^b = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \quad \omega_{ob}^o = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Quelle est la relation entre les deux $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ et (p, q, r) ? On utilise la matrice de projection des rotations:

$$\omega_{ob}^o = \mathcal{R}_o^b \omega_{ob}^b$$

Maintenant, quelle est la relation entre les $(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ et le vecteur $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$? On utilise la convention de rotations ZYX :

$$\omega_{ob}^o = \dot{\psi} \vec{k}^o + \dot{\theta} \vec{j}_1^o + \dot{\varphi} \vec{i}_2^o$$

On calcule les composantes des vecteurs \vec{j}_1 et \vec{i}_2 dans le repère R_o :

$$\begin{aligned} \vec{j}_1^o &= R_\psi \vec{j}_1^{R_1} = \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\psi \\ c\psi \\ 0 \end{bmatrix} \\ \vec{i}_2^o &= [R_\psi R_\theta] \vec{i}_2^{R_2} \\ &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta \\ s\psi c\theta \\ -s\theta \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$\begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\theta} s\psi + \dot{\varphi} c\psi c\theta \\ \dot{\theta} c\psi + \dot{\varphi} s\psi c\theta \\ \dot{\psi} - \dot{\varphi} s\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & -s\psi & 0 \\ s\psi c\theta & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

Donc:

$$\underbrace{\omega_{ob}^o}_{\text{vitesse angulaire}} = \Gamma \underbrace{\dot{\varepsilon}}_{\text{vitesse d'Euler}}$$

A partir de l'équation $\omega_{ob}^o = \Gamma \dot{\varepsilon}$ et sachant que $\omega_{ob}^o = \mathcal{R}_o^b \omega_{ob}^b$:

$$\dot{\varepsilon} = \Gamma^{-1} \mathcal{R}_o^b \omega_{ob}^b$$

où ω_{ob}^b est le vecteur de vitesse mesuré par une centrale inertielle. Cette équation permet de retrouver les vitesses d'Euler à partir du vecteur de vitesse mesuré. Pour trouver les angles d'Euler φ , θ et ψ , il suffit d'intégrer l'équation suivante:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \Gamma^{-1} \mathcal{R}_o^b \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}$$

5 Dynamique d'un corps

5.1 Principe de Newton-Euler

L'étude de la mécanique newtonienne est basée sur les trois lois de Newton, qui sont utilisées pour étudier la mécanique des particules. La première loi de Newton stipule qu'une particule reste dans son état de repos, ou de mouvement uniforme dans une ligne droite s'il n'y a pas de forces agissant sur la particule. Cela signifie que la particule peut être accélérée si et seulement si une force agit sur la particule. La troisième loi de Newton, que l'on appelle quelquefois la loi de l'action et de la réaction, déclare qu'à

chaque action il y a une réaction égale et opposée; c'est-à-dire que lorsque deux particules exercent des forces les unes sur les autres, ces forces auront une grandeur et une direction opposées. La deuxième loi de Newton, appelée la loi du mouvement, stipule que la force qui agit sur une particule et provoque son mouvement est égal au taux de changement de sa quantité de mouvement (ou moment dynamique, *Motion Momentum*) :

$$\frac{d}{dt}(mv_{ob}) = \sum F_i$$

Dans le repère mobile, l'équation du Newton:

$$ma_{ob} = \sum F_i \rightarrow m\dot{v}_{ob}^b = \sum_i F_i - m\omega_b^b \wedge v_{ob}^b$$

Euler

La variation du moment dynamique est égale à la somme des moments.

$$\frac{d}{dt}(J\omega_b) = \sum M_i$$

Pour exprimer l'équation d'Euler, il faut savoir que le tenseur d'inertie J est constant dans le repère mobile. Dans le repère absolu:

$$\begin{aligned} \sum M_i &= \frac{d}{dt} \left\{ \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \omega_b \right\} = \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \dot{\omega}_b + \frac{d}{dt} \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \omega_b \\ &= \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \dot{\omega}_b + \left\{ \dot{\mathcal{R}}_o^b (J^b \mathcal{R}_o^{bT}) + \mathcal{R}_o^b (J^b \dot{\mathcal{R}}_o^{bT}) \right\} \omega_b \\ &= \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \dot{\omega}_b + \left\{ S(\omega_b) \mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} + \underbrace{\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} S(\omega_b)}_{=0} \right\} \omega_b \end{aligned}$$

$$\sum M_i = \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \right) \dot{\omega}_b + \omega_b \wedge \left(\mathcal{R}_o^b J^b \mathcal{R}_o^{bT} \omega_b \right)$$

Dans le repère mobile:

$$J\dot{\omega}_b + \omega_b \wedge J\omega_b = \sum M_i$$

Newton-Euler

On combinant les deux équations de Newton-Euler dans le repère mobile:

$$\begin{aligned} m\dot{v}_{ob} &= \sum F_i - m\omega_b \wedge v_{ob} \\ J\dot{\omega}_b &= \sum M_i - \omega_b \wedge J\omega_b \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} mI_3 & 0_3 \\ 0_3 & J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_{ob} \\ \dot{\omega}_b \end{bmatrix} = \sum \begin{bmatrix} F_i \\ M_i \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \omega_b \wedge m v_{ob} \\ \omega_b \wedge J \omega_b \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

La dynamique peut être représentée sous la forme d'une ODE (Ordinary Differential Equation) de premier ordre:

$$\mathcal{M}\dot{\vartheta} = Q_a - Q_r \quad (1.6)$$

où \mathcal{M} : matrice de masse, Q_a : torseur dynamique des efforts externes, Q_r : torseur dynamique des efforts de couplage et ϑ : torseur cinématique des vitesses généralisées.

5.2 Principe de Jourdain: puissances virtuelles

Coordonnées généralisées:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} v_{ov} \\ \omega_{ov} \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\vartheta} = \begin{bmatrix} \dot{v}_{ov} \\ \dot{\omega}_{ov} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Coordonnées cartésiennes

$$\chi = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ \varphi \\ \theta \\ \psi \\ \vdots \end{bmatrix} \rightarrow \dot{\chi} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Les accélérations dans le repère R_b peuvent s'écrire:

$$\begin{aligned} \epsilon_{oi} &= \frac{\partial \omega_{oi}(\vartheta, \chi)}{\partial \vartheta} \rightarrow \epsilon_{oi} = \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + \epsilon_{R_i} \\ a_{oi} &= \frac{\partial v_{oi}(\vartheta, \chi)}{\partial \vartheta} \rightarrow a_{oi} = \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + a_{R_i} \end{aligned}$$

Principe de Jourdain: puissances virtuelles

$$\delta P_{\text{contraintes}} = 0 \rightarrow \sum_i (\delta v_{oi}^T F_{i,\text{contraintes}} + \delta \omega_{oi}^T M_{i,\text{contraintes}}) = 0$$

A partir des équations de Newton-Euler:

$$\begin{aligned} m a_{oi} &= F_{i,\text{contraintes}} + F_{i,\text{actionnement}} \\ J_i \epsilon_{oi} + \omega_{oi} \wedge J_i \omega_{oi} &= M_{i,\text{contraintes}} + M_{i,\text{actionnement}} \end{aligned}$$

Remplacement équations de Newton-Euler dans le principe des puissances virtuelles:

$$\sum_i \left\{ \delta v_{oi}^T (m a_{oi} - F_{i,a}) + \delta \omega_{oi}^T (J_i \epsilon_{oi} + \omega_{oi} \wedge J_i \omega_{oi} - M_{i,a}) \right\} = 0$$

Sachant que:

$$\delta v_{oi} = \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta} \delta \vartheta \quad \delta \omega_{oi} = \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta} \delta \vartheta$$

En remplaçant les équations de Newton-Euler dans le principe des puissances virtuelles:

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ \delta \vartheta^T \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta}^T (m a_{oi} - F_{i,a}) + \delta \vartheta^T \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta}^T (J_i \epsilon_{oi} + \omega_{oi} \wedge J_i \omega_{oi} - M_{i,a}) \right\} &= 0 \\ \sum_i \left\{ \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta}^T \left(m \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + m a_{R_i} - F_{i,a} \right) + \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta}^T \left(J_i \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta} \dot{\vartheta} + J_i \epsilon_{R_i} + \omega_{oi} \wedge J_i \omega_{oi} - M_{i,a} \right) \right\} &= 0 \end{aligned}$$

On obtient un système d'équation ODE:

$$\mathcal{M} \dot{\vartheta} = Q_a - Q_r \quad (1.7)$$

tels que:

$$\begin{aligned} \sum_i \left\{ m \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta}^T \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta}^T J_i \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta} \right\} \dot{\vartheta} &= \sum_i \left\{ \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta}^T F_{i,a} + \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta}^T M_{i,a} \right\} - \\ \sum_i \left\{ m \frac{\partial v_{oi}}{\partial \vartheta}^T a_{R_i} + \frac{\partial \omega_{oi}}{\partial \vartheta}^T (J_i \epsilon_{R_i} + \omega_{oi} \wedge J_i \omega_{oi}) \right\} & \quad (1.8) \end{aligned}$$

5.3 Exemple

soit un corps dans l'espace dont le mouvement est décrit par ses six coordonnées naturelles:

$$\chi = \begin{bmatrix} x & y & z & \varphi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$$

Il en résulte que le vecteur des vitesses cartésiennes est:

$$\dot{\chi} = \begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} & \dot{\varphi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$$

Cependant, pour la modélisation, on choisit un vecteur de vitesses généralisées:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} u & v & w & p & q & r \end{bmatrix}^T$$

Le repère mobile R_b est associé au mouvement de ce corps. La position de centre de masse G par rapport au repère R_b est constante et dans ce repère:

$$v_{oG} = v_{ob} + \omega_{ob} \times r_{bG}$$

$$\omega_{oG} = \omega_{ob}$$

$$a_{oG} = \dot{v}_{ob} + \epsilon_{ob} \times r_{bG} + \omega_{ob} \times v_{oG}$$

$$\epsilon_{oG} = \dot{\omega}_{ob}$$

On calcule les Jacobienne:

$$\frac{\partial v_{oG}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 & -\tilde{r}_{vG} \end{bmatrix} \quad \frac{\partial \omega_{oG}}{\partial \vartheta} = \begin{bmatrix} 0_3 & \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

où \mathcal{I}_3 la matrice identité 3×3 . La matrice de masse est donc:

$$\mathcal{M} = m \frac{\partial v_{oG}^T}{\partial \vartheta} \frac{\partial v_{oG}}{\partial \vartheta} + \frac{\partial \omega_{oG}^T}{\partial \vartheta} \mathcal{I}_G \frac{\partial \omega_{oG}}{\partial \vartheta} = m \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ -\tilde{r}_{bG}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 & -\tilde{r}_{bG} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} \mathcal{I}_G \begin{bmatrix} \bar{0} & \mathcal{I}_3 \end{bmatrix}$$

où \mathcal{I}_G est le tenseur d'inertie.

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m\mathcal{I}_3 & -m\tilde{r}_{bG} \\ -m\tilde{r}_{bG}^T & \mathcal{I}_G + m\tilde{r}_{bG}^2 \end{bmatrix}$$

Les accélération résiduelles:

$$a_{R,G} = \omega_{ob} \times v_{oG} \quad \epsilon_{R,G} = \bar{0}$$

$$Q_r = m \frac{\partial v_{oG}^T}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial v_{oG}}{\partial \chi} \dot{\chi} \right) + \frac{\partial \omega_{oG}^T}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \omega_{oG}}{\partial \chi} \dot{\chi} + \omega_{oG} \times \mathcal{I}_G \omega_{oG} \right)$$

$$Q_r = m \begin{bmatrix} \mathcal{I}_3 \\ -\tilde{r}_{vG}^T \end{bmatrix} (\omega_{ob} \times v_{oG}) + \begin{bmatrix} \bar{0} \\ \mathcal{I}_3 \end{bmatrix} (\omega_{oG} \times \mathcal{I}_G \omega_{oG})$$

Enfin, le vecteur des efforts généralisés lié aux efforts non-conservatifs:

$$Q_a = \frac{\partial v_{oG}^T}{\partial \vartheta} F_a + \frac{\partial \omega_{oG}^T}{\partial \vartheta} M_a$$

$$Q_a = \begin{bmatrix} F_a \\ -\tilde{r}_{bG} F_a + M_a \end{bmatrix}$$

où F_a et M_a sont respectivement, la résultante au point G des forces et moments appliquées au corps.

Chapter 2

Exercices

1 Dynamique du véhicule

1.1 Modèle véhicule bicyclette

On considère que la vitesse du véhicule dans le repère local est caractérisée par le vecteur $V^b = [v_x, v_y, 0]^T$ comme dans la figure ci-dessous. Les points de contact pneu-sol se situent aux points w_f et w_r . l_f et l_r sont respectivement l'empattement avant et arrière. F_{xi} , F_{yi} et F_{zi} sont respectivement les forces du glissement longitudinal et latéral des pneumatiques et la charge appliquée aux points de contact.

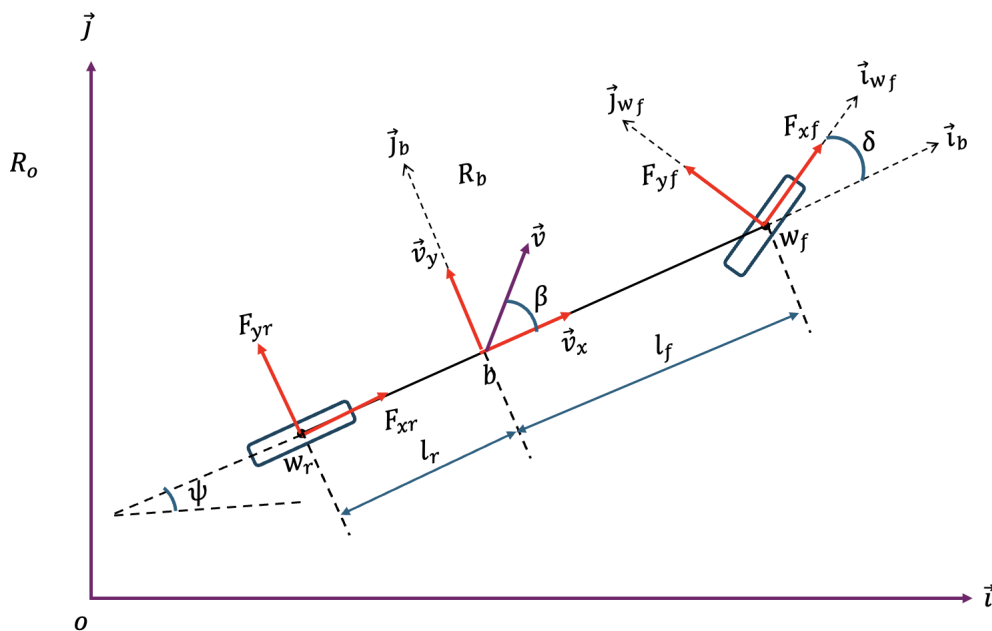


Figure 2.1: Modèle bicyclette. $R_o(O, i, j, k)$ est le repère absolue fixé à un point O . $R_b(b, i_b, j_b, k_b)$ est le repère véhicule fixé au point b ; projection du centre de masse du véhicule sur la chaussée.

1. Quelle est la relation entre le vecteur de vitesse du véhicule dans le repère global

$V_{ob}^o = [\dot{x}, \dot{y}, 0]^T$ et le vecteur de vitesse du véhicule dans le repère local? Déduire la formule permettant de calculer la trajectoire du véhicule en chaque instant t

2. Quelle est la relation entre le vecteur de la vitesse angulaire du véhicule dans le repère local $\omega_{ob}^b = [p, q, r]^T$ et les vitesses d'Euler $(\dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi})$
3. Calculer le vecteur de l'accélération du véhicule a_{ob} dans le repère local R_b
4. Exprimer les vecteurs de position r_{bw_f} et r_{bw_r} de chaque point de contact pneu-sol dans le repère local R_b
5. Exprimer les vecteurs de vitesse v_{bw_f} et v_{bw_r} de chaque point de contact pneu-sol dans le repère local R_b
6. Déduire l'angle de glissement latéral α_f et α_r de chaque pneumatique
7. Écrire les équations de la dynamique latérale du véhicule automobile, en utilisant le principe de Newton-Euler
8. Sous l'hypothèse de petits angles, déduire une écriture en espace d'état sous forme $X = A\dot{X} + Bu$. Sachant que $X = [v_y, \psi]^T$ et les forces pneumatique peuvent être approximées par une simple équation linéaire $F_i = c_{\alpha_i} \alpha_i$ où c_{α_i} est la raideur pneumatique de la roue i et $i = f, r$ (front, rear)
9. Écrire les équations de la dynamique latérale du véhicule automobile, en utilisant cette fois-ci, le principe de Jourdain

Éléments de la dynamique du véhicule

Le châssis d'un véhicule automobile peut se déplacer suivant les 6DDL comme le montre la figure:

- 3 translations: suivant l'axe X (déplacement longitudinal), le long de l'axe Y (déplacement latéral) et suivant l'axe Z (déplacement vertical)
- 3 rotations: ψ autour de l'axe Z (lacet), φ autour de l'axe X (roulis) et θ autour de l'axe Y (tangage).

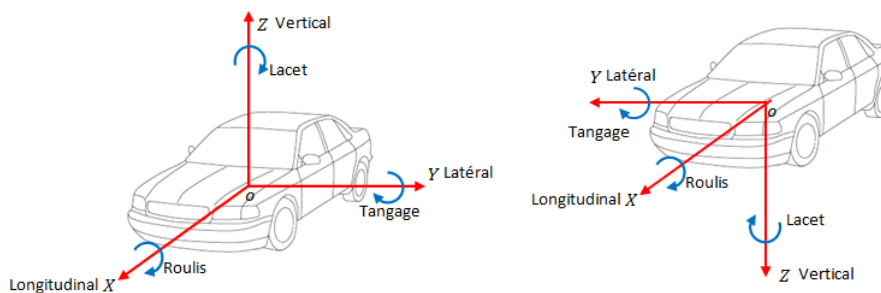


Figure 2.2: Deux types de système de coordonnées: (1) ISO (2) SAE

Le véhicule est sujet à plusieurs entrées connues:

- couple moteur et couple de freinage transmis aux roues: le conducteur régule ces couples à travers l'accélérateur, frein, embrayage et boîte de vitesse. Ces couple concernent la dynamique longitudinale et verticale
- braquage des roues directrices: à travers le système de direction. Le braquage concerne la dynamique latérale et beaucoup moins la dynamique verticale (le roulis étant limité sur un véhicule automobile et les virages sont négociés par des vitesses constantes)

mais aussi des entrées inconnues:

- rafale de vent longitudinal et latéral: influent sur les dynamiques correspondante. Cette entrée est à différencier de la force aérodynamique qui résulte de la pénétration du véhicule, à une vitesse donnée, dans l'air
- irrégularité de la chaussée: cette entrée inconnue influe sur la dynamique verticale. Rouler sur une route lisse est plus confortable que de rouler sur une piste rugueuse ou sur du pavé

Un véhicule routier constitue un système complexe. En effet, la présence d'organes de liaison génèrent des couplages et l'interface roue-sol mis en oeuvre certaines grandeurs difficilement quantifiables. Par conséquent, et suivant l'objectif de l'étude, certaines suppositions simplificatrices peuvent être formulées, par exemple:

- le découplage des mouvements longitudinal, latéral et vertical
- la linéarisation autour d'un point de fonctionnement. Cela permet d'avoir une idée locale sur la dynamique du système
- la vitesse longitudinale v_x est constante.
- l'angle de roulis φ est limité mécaniquement ($\leq 6^\circ$) et angle de braquage roue δ est petit. Par conséquent, on peut écrire que $\sin x = x$, $\cos x = 1$. Les termes croisés tels que x^2 et $x\dot{x}$ peuvent être négligés

Ces suppositions permettent de transformer une représentation 4-roues d'un véhicule vers une représentation équivalente 2-roues plus simple ou communément appelée **modèle bicyclette**.

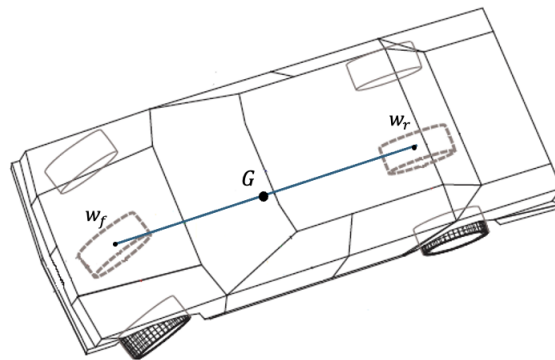
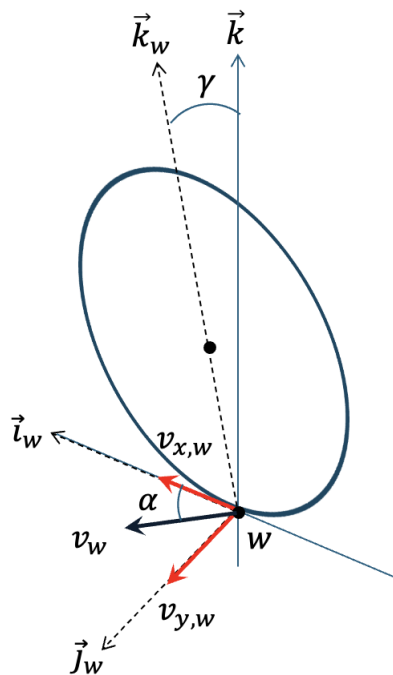


Figure 2.3: Modèle bicyclette équivalent

La dynamique latérale décrit le mouvement latéral et le mouvement du lacet. L'entrée utilisée est l'angle de braquage des roues. A la fin, le modèle résultant est valable seulement pour certaines manoeuvres (maintien et changement de voie) et pour un fonctionnement nominal où $10 \leq v_x \leq 25 \text{ m/s}$ avec de faibles accélérations longitudinales et latérales.

Ces hypothèses permettent de développer un modèle bicyclette qui peut prédire le comportement des états du véhicule suivants: v_y : vitesse latérale, ψ : lacet (cap) du véhicule, β angle de dérive du véhicule où $\tan \beta = \frac{v_y}{v_x}$.

La roue dispose de 3 rotation autour des trois axes du repère local $R_w(w, \vec{i}_w, \vec{j}_w, \vec{k}_w)$ où w est le point de contact roue/sol. On remarque plus particulièrement l'angle de carrossage γ (camber angle), qui joue un rôle important dans la génération de couple d'auto-alignement.



Les pneumatiques sont la seule interface entre le véhicule et la chaussée. Par conséquent, le mouvement du véhicule est principalement déterminé par les générées au point de contact pneu-sol. Au niveau des pneumatiques du véhicule, on peut identifier la force latérale du guidage, la force longitudinale de traction/freinage qui accélère ou freine le véhicule et les moments correspondants. Bien que ces forces soient dynamiquement liées, elles sont généralement traitées séparément.

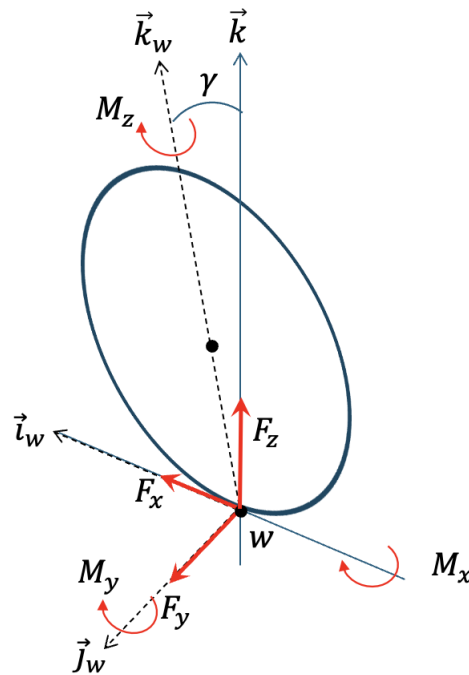


Figure 2.4: Représentation des forces (F_x, F_y, F_z) et moments (M_x, M_y, M_z) appliqués au pneu par la chaussée

Considérons un véhicule se déplaçant à une vitesse v_x , le point de contact pneu-sol de chaque pneumatique se déplace à une vitesse $v_{c,x}$. D'autre part, la roue a une vitesse de roulement notée ω_r .



Par une simple conversion cinématique, on peut écrire $v_{c,x} = r\omega_r$, où r est le rayon de la roue. Cependant, cette relation est vraie si le pneumatique ne représente pas de glissement. A cause de sa nature élastique, le pneumatique se déforme dans longitudinalement et latéralement en fonction des efforts appliqués. On appelle le glissement longitudinale λ la différence entre la vitesse longitudinale du point de contact $v_{c,x}$ et la vitesse de roulement libre de la roue $r\omega$:

$$\lambda = r\omega_r - v_{c,x}$$

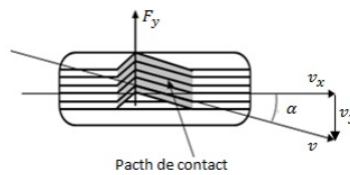
Le glissement est généralement exprimé sous forme d'un taux de glissement normalisé:

$$\lambda = \frac{r\omega - v_{c,x}}{\max(r\omega, v_{c,x})} \quad |\lambda| \leq 1$$

Trois cas peuvent se représenter:

- vitesse constante: $r\omega = v_{c,x} \rightarrow \lambda = 0$, pas de glissement
- accélération: $r\omega > v_{c,x} \rightarrow \lambda \geq 0$. Dans le cas extrême où $\lambda = +1$, on parle de patinage
- freinage: $r\omega \leq v_{c,x} \rightarrow \lambda \leq 0$. Dans le cas extrême où $\lambda = -1$, on parle de blocage

Lorsqu'une roue est soumise à de telles sollicitations latérales, la surface de contact pneu-sol tend à glisser dans le sens opposé.



La déformation résultante de ce glissement crée un angle entre l'axe longitudinal de la roue et la direction de son mouvement, cet angle est communément appelé angle du glissement latéral α :

$$\tan \alpha = \frac{v_{c,y}}{v_{c,x}}$$

En réaction à la déformation, le pneumatique produit un effort latéral.

On peut représenter les forces pneumatiques par une simple représentation linéaire comme suit:

$$F_x = K_\lambda \lambda \quad F_y = K_\alpha \alpha$$

où K_λ et K_α sont des raideurs qui reflètent la nature élastique des pneumatiques. Cependant, cette représentation n'est valide que dans des conditions de conduite normale avec des accélérations et des freinages modérés. Au-delà, tout pneumatique présente une limite au-delà de laquelle il ne peut supporter une force latérale supplémentaire. Lorsqu'un pneu atteint cette saturation, il glisse latéralement et le véhicule devient incontrôlable.

D'autres représentations mathématiques permettent de mieux reproduire le comportement réel des pneumatiques. Dans la littérature on trouve beaucoup de modèles comme le modèle de Dugoff, Fiala et Pacejka. Ces modèles suivent une approche empirique dont les paramètres sont déterminés par des mesures physiques. Par exemple, le modèle de Pacejka est donnée par la forme générique suivante:

$$y(x) = D \sin\{C \tan^{-1}[Bx - E(Bx - \tan^{-1}(Bx))]\}$$

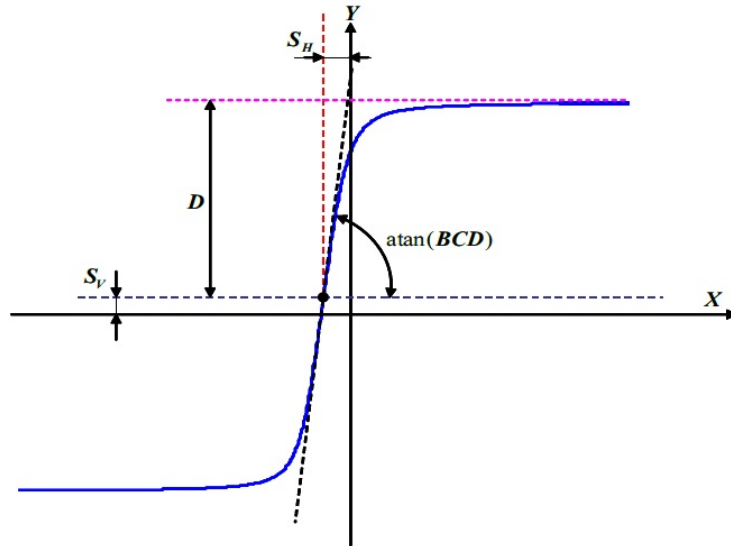


Figure 2.5: Tracé de la formule magique de Pacejka

Éléments de correction

La dynamique latérale décrit le mouvement latéral et le mouvement de lacet pour un angle de braquage en entrée. Le modèle linéaire bicyclette est obtenu en assimilant les deux roues de chaque essieu à une roue équivalente. Le modèle résultant n'est valable que pour des manoeuvres données telles que le maintien de la voie et le changement de voie, également pour un fonctionnement nominal où la vitesse appartient à l'intervalle $10 \leq v_x \leq 25$ m/s avec de faibles accélérations longitudinales et latérales. Les sorties du modèle sont la vitesse latérale v_y et le lacet du véhicule ψ . Dans certaines versions de ce modèle, nous choisissons comme sortie l'angle de dérive du véhicule β où $\tan \beta = \frac{v_y}{v_x}$.

La dynamique du véhicule s'exprime par les trois équations suivantes :

$$\begin{cases} (\dot{v}_x - v_y \dot{\psi}) = F_{xf} \cos \delta + F_{xr} - F_{yf} \sin \delta \\ m(\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) = F_{xf} \sin \delta + F_{yf} \cos \delta + F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} = l_f(F_{xf} \sin \delta + F_{yf} \cos \delta) - l_r F_{yr} \end{cases}$$

Sous l'hypothèse de petits angles, déduire une écriture en espace d'état sous forme $X = A\dot{X} + Bu$. Sachant que $X = [v_y, \dot{\psi}]^T$ et les forces pneumatique peuvent être approximées par une simple équation linéaire $F_i = c_{\alpha_i} \alpha_i$ où c_{α_i} est la raideur pneumatique de la roue i et $i = f, r$ (front, rear)

Avec ces hypothèses, les équations de la dynamique latérale deviennent :

$$\begin{cases} m(\dot{v}_y + v_x \dot{\psi}) = F_{yf} + F_{yr} \\ I_z \ddot{\psi} = l_f F_{yf} - l_r F_{yr} \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \dot{v}_y \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{c_f + c_r}{m v_x} & \frac{l_r c_r - l_f c_f}{m v_x} - v_x \\ \frac{l_r c_r - l_f c_f}{I_z v_x} & -\frac{l_f^2 c_f + l_r^2 c_r}{I_z v_x} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}}_x + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{c_f}{m} \\ \frac{l_f c_f}{I_z} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\delta}_u$$

1.2 Équations symboliques

Dans ce tutoriel, nous cherchons à établir les équations symboliques de la dynamique latérale d'un véhicule automobile. Nous utilisons la méthode Newton-Euler et la Toolbox Matlab Symbolic.

1. On définit les paramètres du véhicule m , l_f , l_r , I_z , c_f et c_r sous forme de variables symboliques :

```
t = sym('t', 'real'); %time
m = sym('m', 'real'); %mass
l_f = sym('l_f', 'real'); %front wheelbase
l_r = sym('l_r', 'real'); %rear wheelbase
I_z = sym('I_z', 'real'); %yaw inertia
c_f = sym('c_f', 'real'); %front tire stiffness
c_r = sym('c_r', 'real'); %rear tire stiffness
ex = [1;0;0]; %unit vector i
ey = [0;1;0]; %unit vector j
```

2. La dynamique latérale permet de simuler 2 degrés de liberté : le déplacement latéral v_y et le mouvement de lacet ψ . On considère que la vitesse longitudinale v_x est constante. Le vecteur de vitesses généralisées est exprimé par :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} v_y \\ \psi \end{bmatrix}$$

Les équations cinématiques d'un point i dans un repère R_b :

$$v_{oi} = v_{ob} + \omega_{ob} \wedge r_{bi} + \dot{r}_{bi}$$

$$\omega_{oi} = \omega_{ob} + \omega_{bi}$$

$$a_{oi} = \dot{v}_{ob} + \epsilon_{ob} \wedge r_{bi} + \ddot{r}_{bi} + \omega_{ob} \wedge (\dot{r}_{bi} + v_{oi})$$

$$\epsilon_{ob} = \dot{\omega}_{ob} + \dot{\omega}_{bi}$$

```
syms psi(t) vy(t)
vx = sym('vx', 'real');
assume(vx>0);
w0b = [0;0;diff(psi(t),t)]
e0b = diff(w0b,t)
v0b = [vx;vy(t);0]
a0b = cross(w0b,v0b) + diff(v0b,t)
```

3. On calcule les efforts pneumatique $\sum_i F_i$ dans R_b :

```
syms Fy_f Fy_r delta(t)
Fyr = Fy_r*ey
RDelta = [cos(delta(t)) sin(delta(t)) 0; -sin(delta(t)) cos(delta(t)) 0; 0 0 1] %rotation matrix for steering angle
```

```
eW_x = RDelta*ex      %projection of the unit vector i of the
                    steered wheel reference frame into Rb
eW_y = RDelta*ey      %projection of the unit vector j of the
                    steered wheel reference frame into Rb
Fyf  = Fy_f*ey        %front tire force expressed in Rb
Fy   = RDelta*Fyf+Fy_r %total tire force
```

4. On calcule la somme des moments $\sum_i M_i$ dans R_b :

$$\sum_i M_i = r_{vwf} \wedge \bar{F}_{yf} + r_{vwf} \wedge \bar{F}_{yr}$$

```
rbwf = [1_f;0;0];      %wf: the front wheel contact point
rbwr = [-1_r;0;0];     %wr: the rear wheel contact point
M = cross(rbwf,RDelta*Fyf) + cross(rbwr,Fyr)
```

5. En appliquant le principe de Newton-Euler, nous pouvons afficher la dynamique latérale

```
m*a0b(2) == Fy(2)
I_z*e0b(3) == M(3)
```

6. Pour le modèle linéaire, les forces pneumatiques sont représentées sous forme linéaire $F_{y,i} = c_i \alpha_i$ où α_i sont les angles de glissement latéral des pneumatiques.

```
v0wf = v0b + cross(w0b,rbwf)      %linear velocity of the front
                    wheel contact point
v0wr = v0b + cross(w0b,rbwr)      %linear velocity of the rear
                    wheel contact point
tanAlpha_f = -(eW_y'*v0wf)/(eW_x'*v0wf) %front tire lateral
                    sideslip angle
tanAlpha_r = -(ey'*v0wr)/(ex'*v0wr)  %rear tire lateral
                    sideslip angle
```

7. Avec l'hypothèse des petits angles δ , pour linéariser la dynamique on calcule les matrices jacobiennes. Commençons par les angles de glissement : α_i :

$$\alpha_{i,L} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial \alpha_i}{\partial v_y} & \frac{\partial \alpha_i}{\partial \dot{\psi}} & \frac{\partial \alpha_i}{\partial \delta} \end{array} \right]_{v_y=0, \dot{\psi}=0, \delta=0} \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ \delta \end{bmatrix}$$

```
syms Dpsi(t) Delta(t) Vy(t)
tmp1 = subs(tanAlpha_f,[vy(t), diff(psi(t),t),delta(t)], [Vy(t),
                    Dpsi(t),Delta(t)])
D1 = functionalDerivative(tmp1,[Vy(t) Dpsi(t) Delta(t)])
D11 = subs(D1,[Vy(t) Dpsi(t) Delta(t)], [0 0 0])
alphaFL = D11'*[vy(t);diff(psi(t),t);delta(t)] %linearized
                    angle front
alphaRL = tanAlpha_r %linearized
                    angle rear
```

8. Nous pouvons écrire la représentation en espace d'état de la dynamique latérale :

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u \text{ où } x = \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \text{ et } u = \delta$$

```

eq1 = subs(m*a0b(2) - Fy(2), cos(delta(t)), 1)
eq2 = subs(I_z*diff(w0b(3), t) - M(3), cos(delta), 1)
eq11 = subs(eq1, [Fy_f Fy_r], [c_f*alphaFL c_r*alphaRL])
eq21 = subs(eq2, [Fy_f Fy_r], [c_f*alphaFL c_r*alphaRL])
eqns = [eq11==0; eq21==0];
vars = [vy(t); diff(psi(t), t)];
collect(eqns, vars)
eqns = subs(eqns, [diff(psi(t), t), diff(psi(t), t, t)], [Dpsi, diff(Dpsi, t)])
vars = [vy(t); Dpsi];
[M, F] = massMatrixForm(eqns, vars)
F = M\F
syms VY DPSI DELTA
eqns = subs(F, [vy(t) Dpsi(t) Delta(t)], [VY, DPSI, DELTA]);
[A, B] = equationsToMatrix(eqns, [VY DPSI])
pretty(A)

```

1.3 Modèle linéaire avec une vitesse constante

On cherche à analyser numériquement le modèle latéral type bicyclette en utilisant Matlab. Dans un fichier matlab, écrire la fonction suivante:

```

function P = vehBicycle (m, Iz ,lf ,lr ,Cf ,Cr ,v)
A = [-( Cf+Cr)/(m*v) -v+( lr*Cr -lf*Cf)/(m*v); (lr*Cr -lf*Cf)/(v*Iz)
      -(lf*lf*Cf+lr*lr*Cr)/(v*Iz)];
B = [Cf/m; lf*Cf/Iz ];
C = eye (2);
D = [0; 0];
P = ss(A,B,C,D);
P. inputname = {'delta'};
P. outputname = {'vy' 'dpsi'};
end

```

La dynamique est simulé pour une entrée δ pour deux vitesses longitudinales $v_x = 10m/s$ et $v_x = 20m/s$. On trace δ , v_y et $\dot{\psi}$ en fonction du temps.

```

clear all
% vehicle Parameters
lf = 1.4; lr = 1; m = 1506; Iz = 2454; Cf = 2*57000; Cr = Cf;

% delta input
t = 0:0.1:10;
delta = (t>2)*5*pi/180;

% bicycle model simulation
v0 = 10;

```

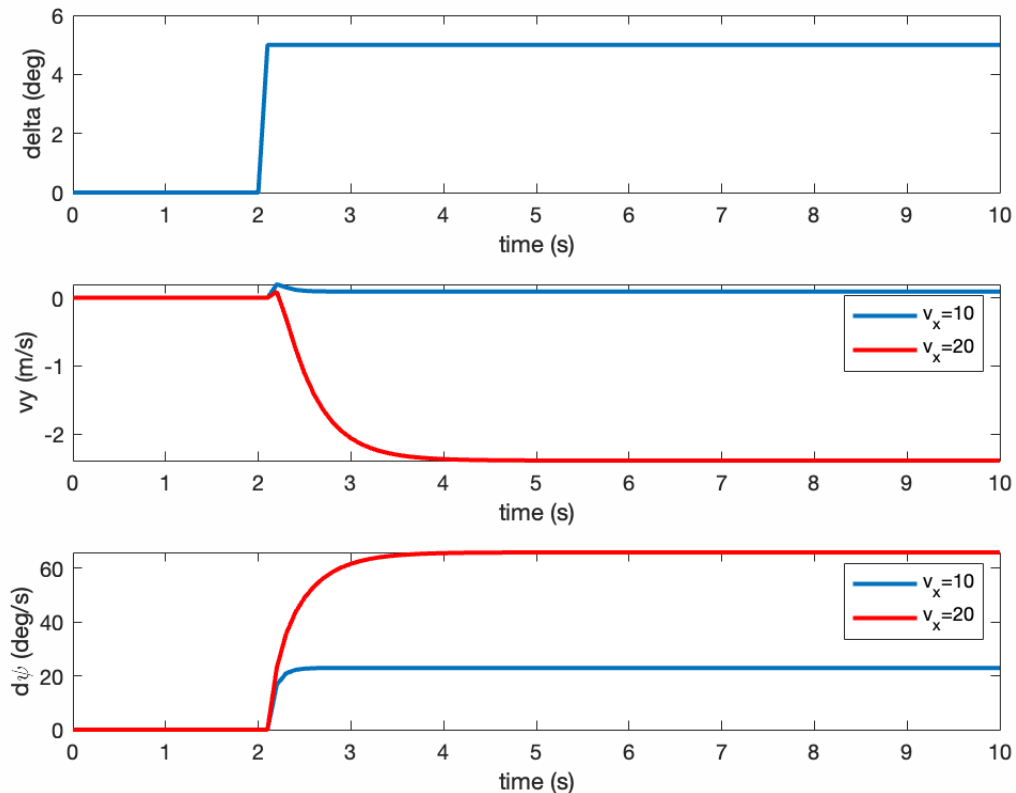
```

bicycle = vehBicycle(m,Iz,lf,lr,Cf,Cr,v0);
y10 = lsim(bicycle, delta, t)';

v0 = 20;
bicycle = vehBicycle(m,Iz,lf,lr,Cf,Cr,v0);
y20 = lsim(bicycle, delta, t)';

figure
subplot(311), plot(t,delta*180/pi), xlabel('time (s)'), ylabel('
    delta (deg)')
subplot(312), plot(t,y10(1,:), t, y20(1:,:), 'r'),
xlabel('time (s)'), ylabel('vy (m/s)'), legend('v_x=10', 'v_x=20')
subplot(313), plot(t,y10(2,:)*180/pi, t,y20(2,:)*180/pi, 'r'),
xlabel('time (s)'), ylabel('d\psi (deg/s)'), legend('v_x=10', 'v_x=20
    ')
h=findobj('type','line'); set(h,'linewidth',2);

```



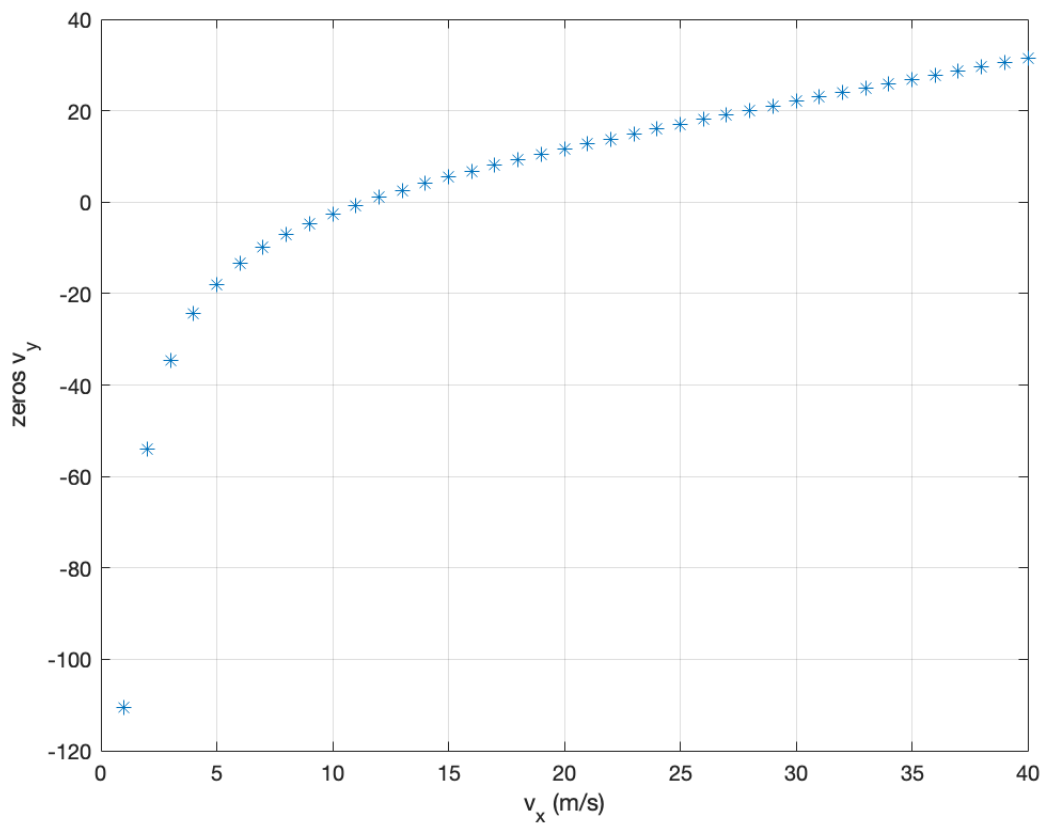
Vous remarquez qu'il existe une différence entre le comportement de la vitesse latérale v_y par rapport au comportement de la vitesse de lacet $\dot{\psi}$. Pour expliquer cette différence, tracer les zéros de la fonction de transfert $\frac{v_y}{\delta}$ et $\frac{\dot{\psi}}{\delta}$ en fonction de la vitesse v_x .

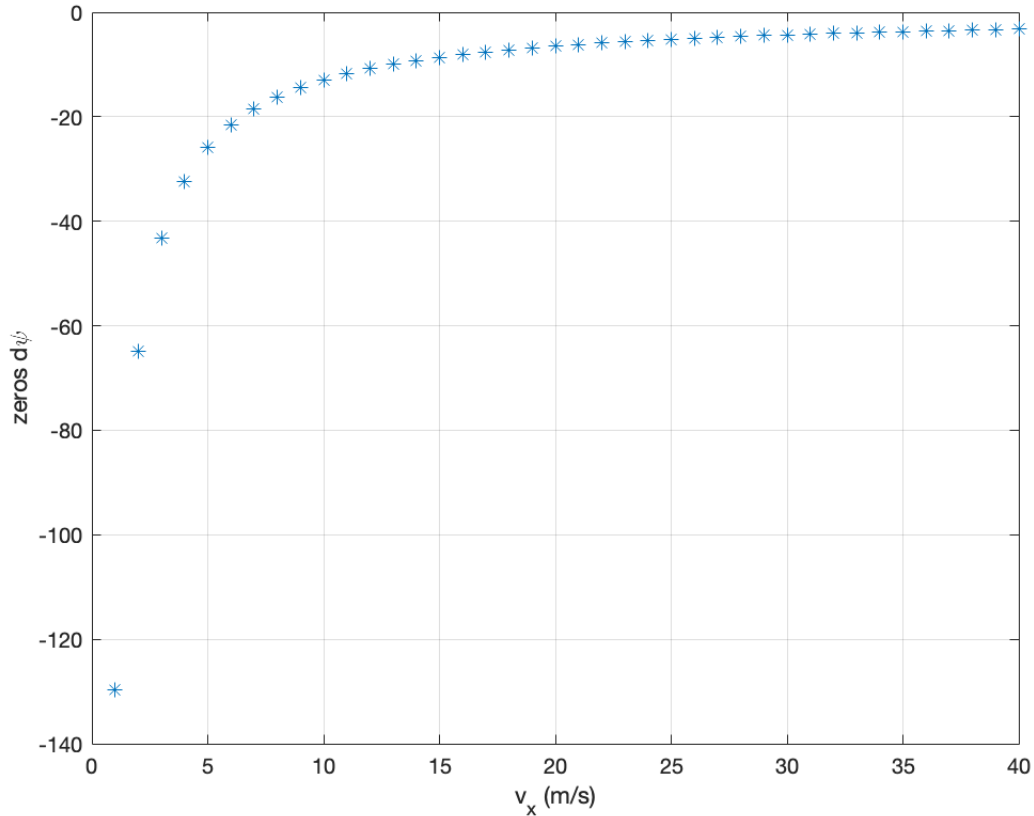
```

vx = 1:40;
for i = 1:length(vx)
    sysV = vehBicycle(m,Iz,lf,lr,Cf,Cr,vx(i));
    [num,den] = ss2tf(sysV.A, sysV.B, sysV.C, sysV.D);
    zeros_vy_delta(i) = roots(num(1,:));
    zeros_dpsi_delta(i) = roots(num(2,:));

```

```
end
figure
plot(vx,zeros_vy_delta,'*'), grid, xlabel('v_x (m/s)'), ylabel('
zeros v_y')
figure
plot(vx,zeros_dpsi_delta,'*'), grid, xlabel('v_x (m/s)'), ylabel('
zeros d\psi')
```





1.4 Modèle linéaire avec une vitesse variable

Dans l'exemple précédent, nous avons simulé la dynamique latérale en considérant une vitesse longitudinale v_x constante. Dans cette partie, on considère une vitesse v_x comme un paramètre variable.

Dans un fichier matlab, écrire la fonction suivante contenant une version modifiée de la dynamique latérale linéaire sous forme d'une équation différentielle ordinaire ODE:

```
function dz = vehicle(t,z,vxT,vx,steerT,steer,m,Iz,lf,lr,Cf,Cr)

dz = zeros(5,1);
v = interp1(vxT,vx,t);
delta = interp1(steerT,steer,t);

if v < 1
    dz = zeros(5,1);
else
    a11 = -(Cf+Cr)/(v*m);
    a12 = (Cr*lr-Cf*lf)/(v*m) - v ;
    a21 = (Cr*lr-Cf*lf)/(v*Iz);
    a22 = -(Cr*lr^2+Cf*lf^2)/(v*Iz);
    b1 = Cf/m; b2 = Cf*lf/Iz;

    dz(1) = a11* z(1) + a12* z(2) + b1* delta;    %dot_vy
    dz(2) = a21* z(1) + a22* z(2) + b2*delta;    %ddot_psi
    dz(3) = z(2);                                %dot_psi
```

```

dz(4) = v*cos(z(3)) - z(1)*sin(z(3));           % traj_x
dz(5) = v*sin(z(3)) - z(1)*cos(z(3));           % traj_y
end
end

```

La dynamique est simulée pour une entrée δ et une vitesse longitudinales variable de 0 à 20 m/s.

```

clear all
lf = 1.4; lr = 1; m = 1506; Iz = 2454; Cf = 2*57000; Cr = Cf;

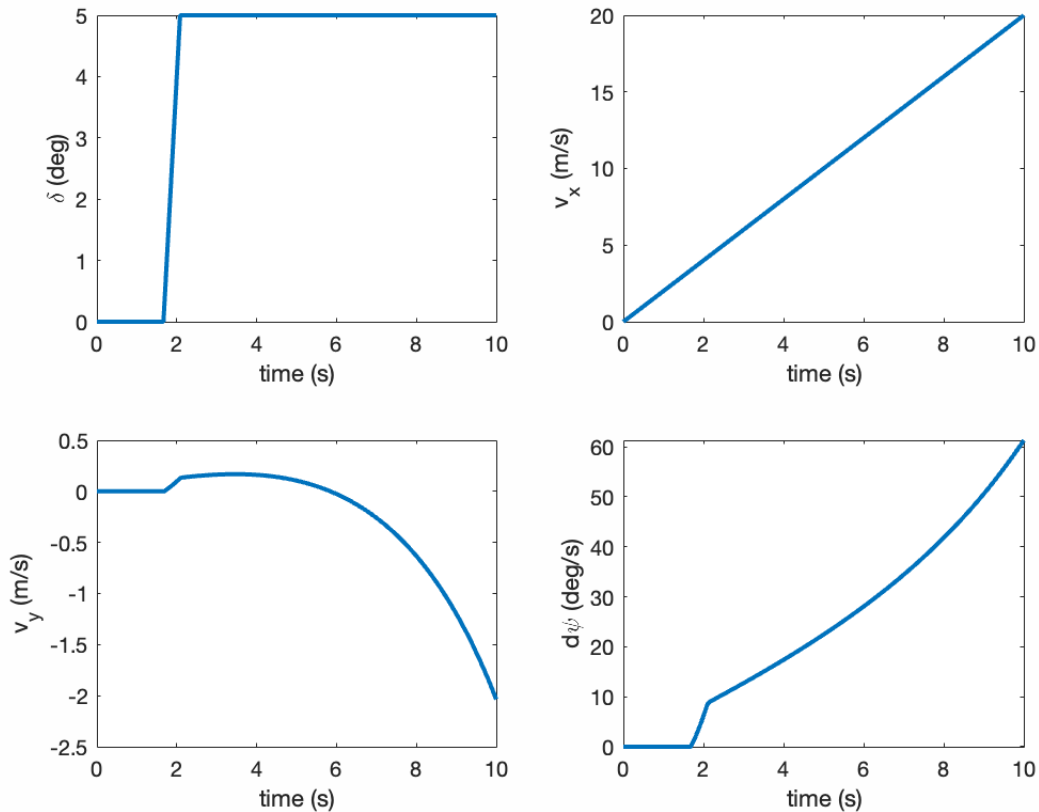
%profile de la vitesse
tf = 10;
vitT = linspace(0,tf,25);
vit = 2*vitT;

%profile delta
steerT = linspace(0,tf,25);
steer = (steerT>2)*5*pi/180;

%simuler pour une vitesse variable
[T,Z] = ode45(@(t,z) vehicle(t,z,vitT,vit,steerT,steer,m,Iz,lf,lr,Cf,
,Cr),[0 tf],zeros(1,5));

figure
subplot(221), plot(steerT,steer*180/pi), xlabel('time (s)'), ylabel(
'\delta (deg)'),
subplot(222), plot(vitT,vit), xlabel('time (s)'), ylabel('v_x (m/s)'
),
subplot(223), plot(T,Z(:,1)), xlabel('time (s)'), ylabel('v_y (m/s)'
),
subplot(224), plot(T,Z(:,2)*180/pi), xlabel('time (s)'), ylabel('d\
psi (deg/s)')
h=findobj('type','line'); set(h,'linewidth',2);

```

On Reprène la même simulation en utilisant des données de vitesse et de braquage réelles enregistrées lors d'une expérimentation sur une piste d'essai. Les données se trouvent dans le fichier *file_data.mat*.

```
clear all
load file_data.mat
m = 1506; Iz = 2454; Cf = 2*57500; Cr = 2*57500; lf = 1.00654; lr =
    1.4625;
tf = max(time);
psi0 = psi_mesure(1);
x0 = traj_x_mesure(1);
y0 = traj_y_mesure(1);
condInit = [0 0 psi0 x0 y0];
vitT = time;
steerT = time;
options = odeset('RelTol',1e-4,'AbsTol',[1e-4 1e-4 1e-5 1e-4 1e-4]);
[T,Z] = ode45(@(t,z) vehicle(t,z,vitT,vit,steerT,steer,m,Iz,lf,lr,Cf
    ,Cr),[0 tf],condInit,options);

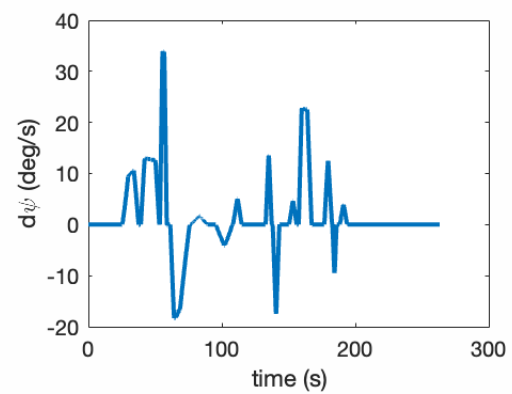
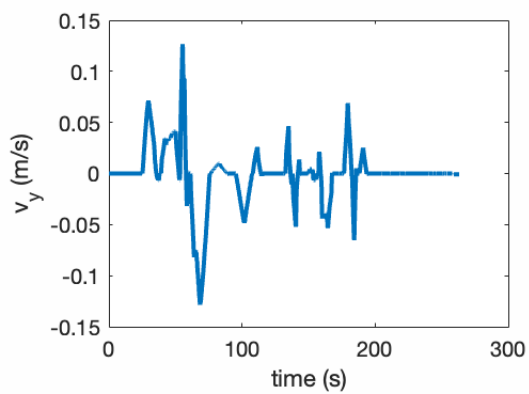
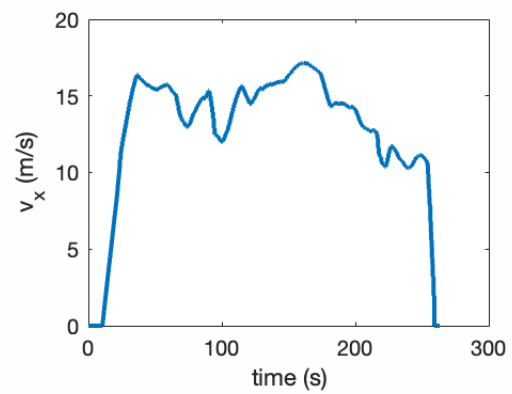
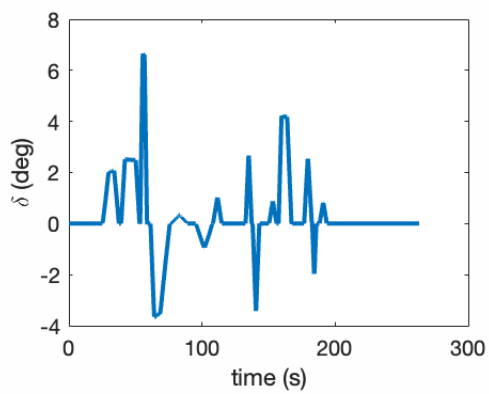
figure
subplot(221), plot(steerT,steer*180/pi), xlabel('time (s)'), ylabel(
    '\delta (deg)'),
subplot(222), plot(vitT,vit), xlabel('time (s)'), ylabel('v_x (m/s)'
    ),
subplot(223), plot(T,Z(:,1)), xlabel('time (s)'), ylabel('v_y (m/s)'
    ),
subplot(224), plot(T,Z(:,2)*180/pi), xlabel('time (s)'), ylabel('d\psi (deg/s)')
```

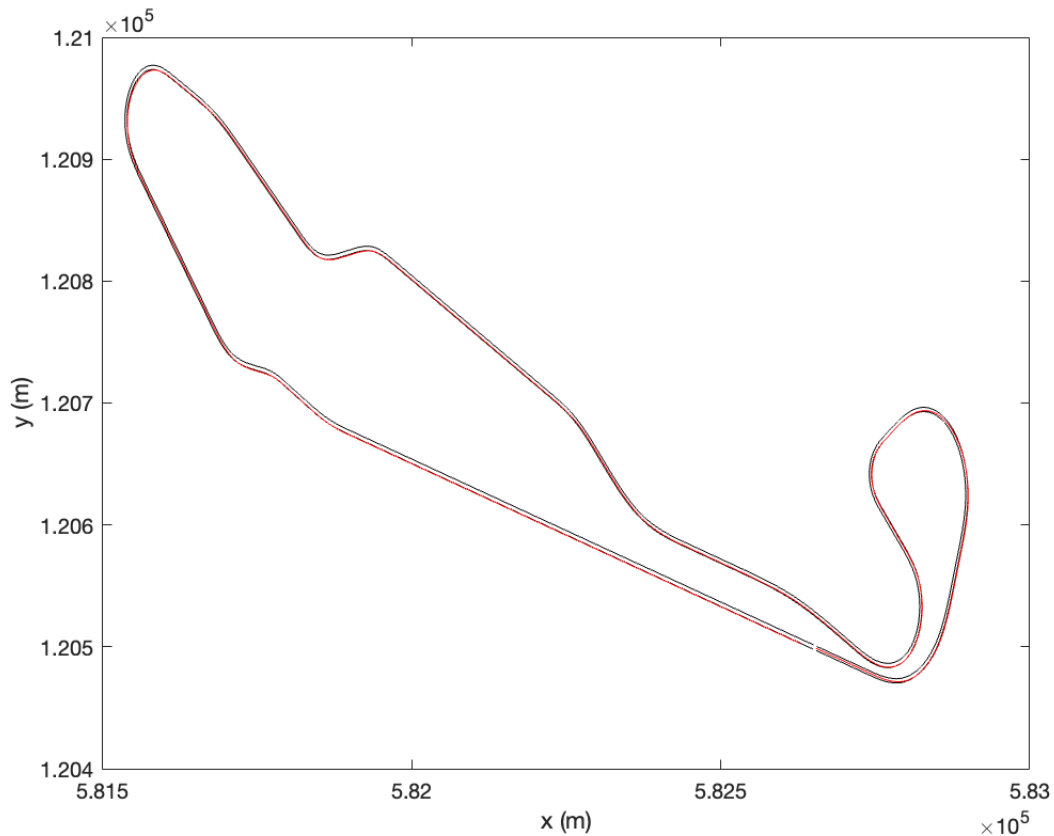
```

    psi (deg/s)')
h=findobj('type','line'); set(h,'linewidth',2);

% trajectory plot
figure
plot(piste_centre_xd, piste_centre_yd,'k'), hold on
plot(piste_centre_xg, piste_centre_yg,'k')
plot(Z(:,4),Z(:,5),'r'), xlabel('x (m)'), ylabel('y (m)')

```





1.5 Travail à faire

A l'aide de logiciel Matlab, Matlab Symbolique et Matlab live script editor. Faire les parties des sections précédentes:

- Équations symboliques de la dynamique longitudinale/latérale,
- Simuler la dynamique latérale avec une vitesse constante/variable en considérant une formulation linéaire des pneumatiques,
- Tracer sur deux figures séparées la courbe de la force de glissement latérale des pneumatiques $F_{y,i}$ en fonction du glissement latéral α_i où $i = f, r$. Considérez le modèle non-linéaire Fiala suivant:

$$F_y = \begin{cases} -C_\alpha z + \frac{C_\alpha^2}{3\mu F_z} |z|z - \frac{C_\alpha^3}{27\mu^2 F_z^2} z^3 & \text{si } |z| < \tan\alpha_{sl} \\ -\mu F_z \operatorname{sgn} z & \text{si } |z| \geq \tan\alpha_{sl} \end{cases}$$

où $z = \tan\alpha$ et $\alpha_{sl} = \arctan\frac{3\mu F_z}{C_\alpha}$ (il faut que vous calculiez les forces F_z de chaque pneumatique). $C_\alpha = 100000$ N.m, $\mu = 0.8$

- Tracer sur les mêmes courbes précédentes la force de glissement longitudinale des pneumatiques $F_{x,i}$.
- Linéariser le modèle Fiala et trouver le point d'intersection α entre la courbe linéaire et non-linéaire. Déduire la zone linéaire des pneumatiques.

- Simuler la dynamique latéral avec une vitesse constante/variable en considérant une formulation nonlinéaire des pneumatiques.

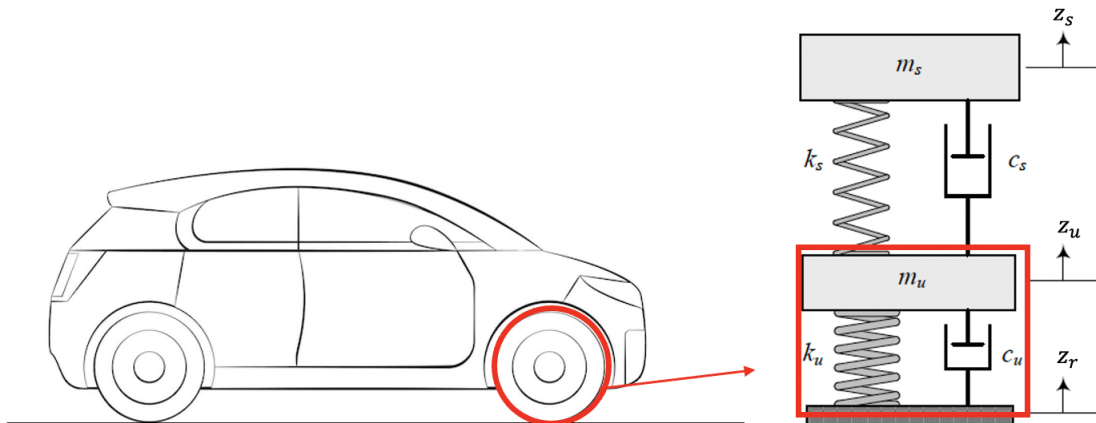
2 Dynamique verticale

Dans cet exemple, nous cherchons à étudier la dynamique verticale d'un véhicule automobile. Cette dynamique permet d'analyser l'aspect vibratoire du châssis du véhicule via les suspensions et de définir des indices de confort de conduite. Plusieurs modèles sont proposés dans la littérature permettant de simuler un nombre défini de degrés de liberté.

Question : étudier le modèle Quarter car et le modèle Half car. Trouver les fréquences propres.

2.1 Quarter model

La figure suivante montre le modèle quart du véhicule. Il représente une masse non-suspendue m_u (roue), une masse suspendue m_s (quart du véhicule), une suspension avec un ressort de raideur k_s et amortissement c_s . De même, la roue est représentée par un ressort de raideur k_u et amortissement c_u . Le mouvement vertical du châssis et de la roue sont représentés respectivement par z_s et z_u . Le profil de la chaussée (une entrée du système) est z_r



Les deux degrés de liberté sont représentés par le vecteur de vitesses généralisées suivant :

$$q = \begin{bmatrix} \dot{z}_u \\ \dot{z}_s \end{bmatrix}$$

Les équations de la dynamique verticale :

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = F_{s,s} + F_{d,s} \\ m_u \ddot{z}_u = -F_{s,s} - F_{d,s} + F_{s,u} + F_{d,u} \end{cases}$$

où $F_{s,s}$ est la force de ressort suspendu (suspended spring), $F_{s,u}$ est la force de ressort non-suspendu (unsuspended spring), $F_{d,s}$ est la force de l'amortisseur suspendu (suspended damper) et enfin $F_{d,u}$ est la force de l'amortisseur non-suspendu (unsuspended damper). Introduisons la déflexion z_{def} :

$$\begin{cases} F_{s,s} = -k_s z_{s,def} \\ F_{d,s} = -c_s \dot{z}_{s,def} \\ F_{s,u} = -k_u z_{u,def} \\ F_{d,u} = -c_u \dot{z}_{u,def} \\ z_{s,def} = z_s - z_u \\ z_{u,def} = z_u - z_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_s \ddot{z}_s = -k_s(z_s - z_u) - c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) \\ m_u \ddot{z}_u = k_s(z_s - z_u) + c_s(\dot{z}_s - \dot{z}_u) - k_u(z_u - z_r) - c_u(\dot{z}_u - \dot{z}_r) \end{cases}$$

Cette équation peut être exprimée comme $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$:

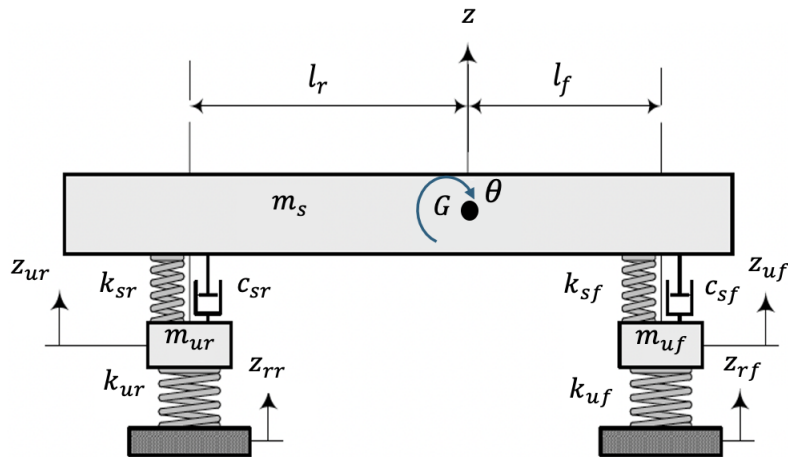
$$\begin{bmatrix} m_s & 0 \\ 0 & m_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z}_s \\ \ddot{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s + c_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{z}_u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_s & -k_s \\ -k_s & k_s + k_u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_s \\ z_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ k_u z_r + c_u \dot{z}_r \end{bmatrix}$$

Pour trouver les fréquences naturelles et les modes de vibration, il faut résoudre l'équation caractéristique $\det(K - \omega^2 M) = 0$. Exemple: $m_s = 375$ kg, $m_u = 75$ kg, $k_u = 193000$ N/m, $k_s = 35000$ N/m, on trouve $f_1 = 1.41$ Hz, $f_2 = 8.79$ Hz.

2.2 Half model

Le modèle quart de véhicule est bon pour examiner et optimiser les modes de vibration du châssis. Cependant, nous pouvons étendre le modèle de vibration d'un véhicule pour inclure également le tangage et d'autres modes de vibrations.

La figure suivante montre le modèle demi véhicule. Il représente deux masses non-suspendues m_1 et m_2 (deux roues), une masse suspendue m (demi véhicule).



Les équations de la dynamique verticale:

$$\begin{cases} m_s \ddot{z} = -k_{sf}(z - z_{uf} - l_f \theta) - k_{sr}(z - z_{ur} + l_r \theta) - c_{sf}(\dot{z} - \dot{z}_{uf} - l_f \dot{\theta}) - c_{sr}(\dot{z} - \dot{z}_{ur} + l_r \dot{\theta}) \\ I_y \ddot{\theta} = l_f c_{sf}(\dot{z} - \dot{z}_{uf} - l_f \dot{\theta}) - l_r c_{sr}(\dot{z} - \dot{z}_{ur} + l_r \dot{\theta}) + l_f k_{sf}(z - z_{uf} - l_f \theta) - l_r k_{sr}(z - z_{ur} + l_r \theta) \\ m_{uf} \ddot{z}_{uf} = c_{sf}(\dot{z} - \dot{z}_{uf} - l_f \dot{\theta}) + k_{sf}(z - z_{uf} - l_f \theta) - k_{uf}(z_{uf} - z_{rf}) \\ m_{ur} \ddot{z}_{ur} = c_{sr}(\dot{z} - \dot{z}_{ur} + l_r \dot{\theta}) + k_{sr}(z - z_{ur} + l_r \theta) - k_{ur}(z_{ur} - z_{rr}) \end{cases}$$

Cette équation peut être exprimée sous la forme $M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = F$:

$$M = \begin{bmatrix} m_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{uf} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_{ur} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{sf} + c_{sr} & l_r c_{sr} - l_f c_{sf} & -c_{sf} & -c_{sr} \\ l_r c_{sr} - l_f c_{sf} & l_r^2 c_{sr} + l_f^2 c_{sf} & l_f c_{sf} & -l_r c_{sr} \\ -c_{sf} & l_f c_{sf} & 0 & 0 \\ -c_{sr} & -l_r c_{sr} & 0 & c_{sr} \end{bmatrix}$$

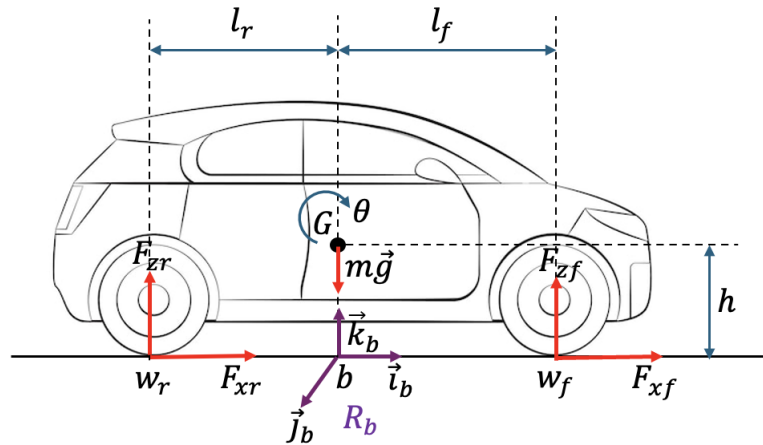
$$K = \begin{bmatrix} k_{sf} + k_{sr} & l_r k_{sr} - l_f k_{sf} & -k_{sf} & -k_{sr} \\ l_r k_{sr} - l_f k_{sf} & l_r^2 k_{sr} + l_f^2 k_{sf} & l_f k_{sf} & -l_r k_{sr} \\ -k_{sf} & l_f k_{sf} & k_{sf} + k_{uf} & 0 \\ -k_{sr} & -l_r k_{sr} & 0 & k_{sr} + k_{ur} \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_{uf} z_{rf} \\ k_{ur} z_{rr} \end{bmatrix}$$

Pour trouver les fréquences propres, nous pouvons résoudre l'équation caractéristique $\det(K - \omega^2 M) = 0$ ou rechercher les valeurs propres de la matrice $M^{-1}K$. AN: $m = 420$ kg, $m_1 = 53$ kg, $m_2 = 76$ kg, $I_y = 1100$ kgm², $l_f = 1.4$ m, $l_r = 1.47$ m, $k_{sf} = 10000$ N/m, $k_{sr} = 13000$ N/m, $k_{uf} = k_{ur} = 200000$ N/m. On trouve $f_1 = 0.976$ Hz, $f_2 = 1.179$ Hz, $f_3 = 8.431$ Hz, $f_4 = 10.021$ Hz.

3 Dynamique longitudinale

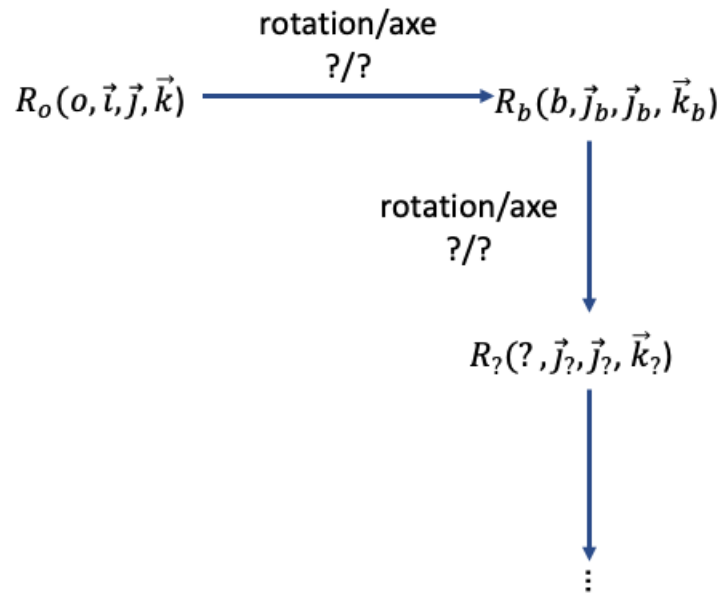
On considère le véhicule, de la figure ci-dessous, représenté sous la forme d'un corps unique rigide, de centre de masse G , ayant 2 degrés de liberté, à savoir le déplacement longitudinal et la rotation en tangage qui résulte des phases d'accélération et de freinage.



On considère un référentiel véhicule $R(b, \vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$ dont on va exprimer la dynamique du véhicule. Les deux degrés de liberté sont représentés par le vecteur de vitesses généralisé suivant :

$$q = \begin{bmatrix} v_x \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

1. Dédurre le modèle de la dynamique longitudinale à 2 DoF par le principe des puissances virtuelles
2. Étudier l'équilibre de ce système. En déduire les forces normales à l'équilibre. Donner le transfert de charge ΔF_z en fonction de l'accélération longitudinale $a_x = \dot{v}_x$
3. Dédurre l'accélération maximale que l'on peut obtenir en considérant un véhicule à propulsion (essieu arrière) en fonction de l'adhérence μ_x et sachant que l'accélération de portance est atteinte lorsque $F_z = 0$
4. Trouvez l'expression des forces optimales d'accélération et de freinage. Dessinez la figure $\frac{F_x}{mg}$ en fonction de $\frac{a_x}{mg}$ pour les pneus avant et arrière
5. Dédurre la relation entre les deux forces $F_{x,f}$ et $F_{x,r}$ en fonction de μ_x . Tracer la courbe de distribution des deux forces sur les essieux avant et arrière en prenant μ_x comme paramètre



3. Proposer un ensemble de vecteur de vitesses généralisées pour modéliser le système.
4. Quelles sont les conditions pour obtenir les trajectoires d'équilibre?
5. Quelles sont les hypothèses de la modélisation?
6. Exprimer la position, la vitesse et l'accélération du corps arrière par rapport à b exprimées dans le repère R_b : r_{bG_r} , \dot{r}_{bG_r} et \ddot{r}_{bG_r} .
7. Dédire la vitesse et l'accélération du corps arrière par rapport à o exprimées dans le repère R_b : \dot{r}_{oG_r} et \ddot{r}_{oG_r} .
8. Exprimer les vecteurs de vitesse et accélération angulaires du corps arrière par rapport à b exprimées dans le repère R_b : ω_{bG_r} et $\dot{\omega}_{bG_r}$.
9. Dédire les vecteurs de vitesse et accélération angulaires du corps arrière par rapport à o exprimées dans le repère R_b : ω_{oG_r} et ϵ_{oG_r} .
10. Refaire les questions 6-9 pour le corps avant G_f .
11. Pour les deux corps, calculer la jacobienne des vitesses et déduire les accélérations résiduelles.
12. Exprimer la position des deux points de contact pneu-sol dans le repère R_b : r_{bc_r} et r_{bc_f} .
13. Exprimer le vecteur de vitesse des deux points de contact pneu-sol dans le repère R_b : v_{oc_r} et v_{oc_f} (regarder la figure 10 de la référence).
14. Expliquer l'équation de roulement sans glissement (regarder les figure 3 et 4 et les équations 8, 9, 10 de la référence)

15. Déduire les angles de glissement latéral α_r et α_f
16. Quel est la signification de l'angle de carrossage γ ? Quel est son effet? Comment peut-on le calculer?
17. Expliquer la figure 5 de la référence d'un point de vu stabilité.
18. A partir de la figure 5, on peut déduire les modes de vibration du véhicule deux-roue: capsize, weave et wobble. Expliquer, de votre propre compréhension, ces modes et chercher des vidéos sur ces trois modes.

Chapter 3

Travaux pratiques

Outils: utiliser l'outil **Matlab Symbolic**. et **Matlab live editor**. Exporter ce dernier **pdf** pour le compte rendu.

Durée TP: 8 heures. Le compte rendu est à déposer sur Ecampus à la fin de TP.

Attention: pour exprimer la transposée d'un vecteur ou d'une matrice, utiliser l'expression suivant $A.'$. Le point avant la transposée permet d'exprimer la transposée réelle (et non pas la transposée conjuguée).

Description du véhicule

On considère un véhicule automobile quatre-roues et on cherche à établir le modèle dynamique dans le repère body-frame $R_b(b, \vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b)$. On considère 4 degrés de libertés (DDL): le mouvement longitudinal, le mouvement latéral, la rotation lacet et la rotation roulis.

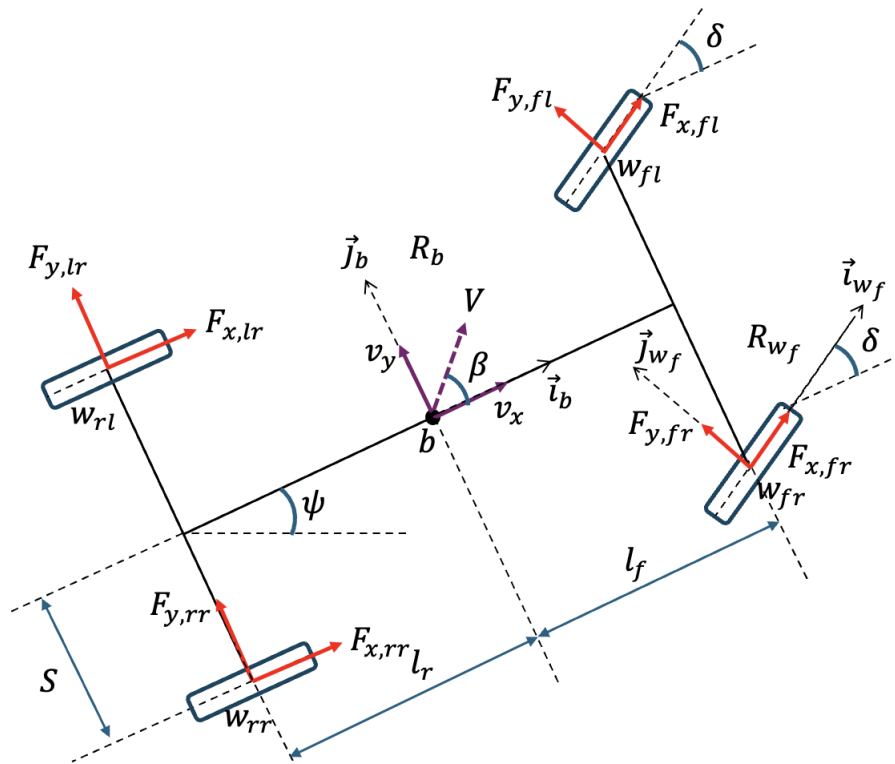
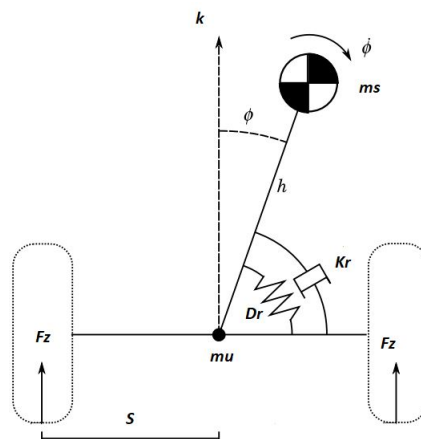


Figure 3.1: **rr**: rear-right, **rl**: rear-left, **fr**: front-right, **fl**: front-left.

Le véhicule est considéré comme un ensemble de deux corps : la masse non-suspendue G_u de masse m_u et la masse suspendue G_s de masse m_s . Les deux corps sont liés par le mécanisme de suspension. La suspension est modélisée comme un système ressort-amortisseur angulaire équivalent avec une rigidité K_r et un amortissement D_r . La longueur des essieux (distance entre deux roues d'un même essieu) est supposée être $2S$.



Suivre la même démarche qu'on TD pour établir la dynamique du véhicule simulant les 4 DDL en utilisant le principe des puissances virtuelles. Respecter les notations données dans ce document.

On commence par définir les variables symboliques des différents paramètres du véhicule et variables de la cinématique et de la dynamique.

```
clear all; clc;

syms t g real positive
syms vx(t) vy(t) psi(t) phi(t) delta(t)
syms h S l_f l_r real positive
syms m_u m_s real positive
syms I_xu I_yu I_zu I_xs I_ys I_zs real
syms Fx_rr Fy_rr Fz_rr Fx_rl Fy_rl Fz_rl
syms Fx_fr Fy_fr Fz_fr Fx_fl Fy_fl Fz_fl
syms tau_R
syms c_r c_f K_r D_r real positive

assume(vx(t), 'real')
assume(vy(t), 'real')
assume(psi(t), 'real')
assume(phi(t), 'real')
assume(delta(t), 'real')

sympref('AbbreviateOutput',false);           % to display result
        without abbreviation
sympref('MatrixWithSquareBrackets',true);    % to display matrices
        with brackets

% unit vectors
ex = [1; 0; 0];
ey = [0; 1; 0];
ez = [0; 0; 1];
```

Pour les 4 DDL, on considère le vecteur de vitesses généralisées suivant:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

où v_x , v_y sont la vitesse longitudinale et latérale du véhicule exprimée en R_b . $\dot{\psi}$ est la vitesse de lacet entre le body-frame R_b et le référentiel inertiel R_o . $\dot{\phi}$ est la vitesse de roulis entre le body-frame R_b et le body-frame de la masse suspendue (on le note R_s). L'ordre des rotation est donné par:

$$R_o(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{\psi/\vec{k}} R_b(\vec{i}_b, \vec{j}_b, \vec{k}_b) \xrightarrow{\phi/\vec{i}_b} R_s(\vec{i}_s, \vec{j}_s, \vec{k}_s)$$

```
vartheta = [vx(t), vy(t) diff(psi(t),t) diff(phi(t),t)]
v0b =
w0b =
d_v0b =
d_w0b =
```

Masse non-suspendue

On suppose que le centre de masse du corps non-suspendu G_u se trouve à l'origine de body-frame R_b . Appliquer les équations de la cinématique pour un seul corps pour calculer la cinématique de ce corps, les accélérations résiduelles $\epsilon_{G_u,R}$ et $a_{G_u,R}$ ainsi que les matrices de jacobien $\frac{\partial v_{oG_u}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \omega_{oG_u}}{\partial \theta}$.

```
fprintf('***** unsuspended body ***** \n')

rbGu =
vOGu =
wOGu =
eOGu =
aOGu =
eGuR =
aGuR =
JL_Gu =
JW_Gu =
```

Masse suspendue

Le centre de masse du corps suspendu G_s se trouve à une hauteur h de l'origine de body-frame R_b . Appliquer les équations de la cinématique multi-corps pour calculer la cinématique de ce corps, les accélérations résiduelles $\epsilon_{G_s,R}$ et $a_{G_s,R}$ ainsi que les matrices de jacobien $\frac{\partial v_{oG_s}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \omega_{oG_s}}{\partial \theta}$.

```
fprintf('***** suspended body ***** \n')

rbGs_s =
R_phi =
rbGs =
wPhi =
d_rbGs =
wOGs =
vOGs =
eOGs =
dd_rbGs =
aOGs =
eGsR =
aGsR =
JL_Gs =
JW_Gs =
```

Matrice de masse

Appliquer le principe de Jourdain pour calculer la matrice de masse de chaque corps. Le calcul de cette matrice de masse nécessite les tenseur d'inertie de chaque corps. On rappelle que ces matrices sont constants dans leur body-frame respectifs. Comme le corps suspendu G_s subit la rotation de roulis, sa masse d'inertie doit être projetée du repère R_s vers le repère R_b :

$$\mathcal{I}_{G_s} = R_\phi \mathcal{I}_{G_s}^s R_\phi^T$$

```
fprintf('*****MassMatrix*****\n')
IGu = [I_xu, 0, 0; 0, I_yu, 0 ; 0, 0, I_zu]; % inertia of Gu
      body in Rb
IGs_s = [I_xs, 0, 0; 0, I_ys, 0 ; 0, 0, I_zs]; % inertia of Gs
      body in Rs
IGs = % projection of
      inertia of Gs to Rb
MM_L = % mass matrix of
      the linear velocity part
MM_R = % mass matrix of
      the rotational velocity part
MassMatrix = MM_L+MM_R % mass matrix
```

Contribution de la gravité

Appliquer le principe de Jourdain pour calculer la contribution du vecteur de gravité à l'effort d'actionnement généralisé est:

```
fprintf('***** Gravity contribution *****\n')
g_vec = [0; 0; -g];
Qg =
```

Pneumatique arrière

L'essieu arrière est composé de deux roues : rr (arrière-droite) et rl (arrière-gauche). Le point de contact entre les pneus et la route est noté w_i où $i = \{rr, rl\}$. Les deux roues appartiennent à la masse non-suspendue.

Appliquer les équations de la cinématique pour un seul corps pour calculer la cinématique de point de contact et les matrices de jacobien $\frac{\partial v_{oc_i}}{\partial \theta}$, $i = \{rr, rl\}$. Exprimer la contribution des forces des pneumatiques à l'effort d'actionnement généralisé où $\vec{F}_{T,i}$ est le vecteur des forces pneumatiques:

$$F_{T,i} = \begin{bmatrix} F_{x,i} \\ F_{y,i} \\ F_{z,i} \end{bmatrix}$$

Déduire les angles de glissement latéral α_i , $i = \{rr, rl\}$:

$$\alpha_i = -\arctan\left(\frac{\vec{v}_{OC_i} \cdot \vec{j}_{w_i}}{\vec{v}_{OC_i} \cdot \vec{i}_{w_i}}\right)$$

```
fprintf('***** Rear tires contribution *****\n')

rbw_rl =
rbw_rr =
v0w_rl =
```

```

v0w_rr =
JL_wrl =
JL_wrr =
FT_rr = Fx_rr*ex+Fy_rr*ey+Fz_rr*ez
FT_rl = Fx_rl*ex+Fy_rl*ey+Fz_rl*ez
alpha_rl =
alpha_rr =
QT_rl =
QT_rr =

```

Pneumatique avant

L'essieu avant est composé de deux roues : fr (avant droite) et fl (avant gauche). Le point de contact entre les pneus et la route est noté w_i où $i = \{fr, fl\}$. Répondre aux mêmes questions de la sous-section précédentes.

```

fprintf('***** Front tires contribution *****\n')

rbw_fl =
rbw_fr =
v0w_fl =
v0w_fr =
JL_wfl =
JL_wfr =
R_delta =
exT =
eyT =
FT_fr = Fx_fr*exT+Fy_fr*eyT+Fz_fr*ez
FT_fl = Fx_fl*exT+Fy_fl*eyT+Fz_fl*ez
alpha_fl =
alpha_fr =
QT_fl =
QT_fr =

```

Moment de roulis

Comme indiqué précédemment, la suspension est modélisée comme un système ressort-amortisseur angulaire équivalent. Ce système produit un couple scalaire τ_R autour de l'axe de roulis \vec{i}_b . Ce couple est ensuite appliqué à la masse suspendue G_s et à la masse non suspendue G_u dans le sens inverse. Sa contribution peut alors s'écrire par :

$$Q_\tau = \frac{\partial \omega_{oG_s}}{\partial \vartheta}^T (\tau_R \cdot \vec{i}_b) - \frac{\partial \omega_{oG_u}}{\partial \vartheta}^T (\tau_R \cdot \vec{i}_b)$$

Cependant, on peut également calculer cette contribution d'une manière plus simple. On sait que la puissance de ce couple est donnée par $P = \tau \cdot \dot{\phi}$, alors, en appliquant le principe des puissances virtuelles, sa contribution peut être écrite par :

$$Q_\tau = \frac{\partial \dot{\phi}}{\partial \vartheta}^T \tau_R$$

```
fprintf('***** Roll Moment *****\n')
Q_Roll =
```

Efforts d'actionnement généralisés

Après avoir recenser l'ensemble des efforts (forces et moments) d'actionnement, le vecteur des efforts d'actionnement généralisés est la somme de toutes les contributions:

```
fprintf('*****Generalized actuation effort *****
\n')
Qa = Qg+QT_rr+QT_rl+QT_fl+QT_fr+Q_Roll
```

Efforts résiduels généralisés

Appliquer le principe des puissances virtuelles pour calculer le vecteur des efforts résiduels généralisés.

```
fprintf('*****Generalized residual effort ***** \n')
QRL = % linear part
QRW = % rotational part
QR = QRL + QRW
```

Dynamique du véhicule

Exprimer les équations de la dynamique du véhicule 4 DDL.

```
fprintf('*****Vehicle dynamics ***** \n')
Effort = Qa-QRL-QRW;
d_vartheta = diff(vartheta,t)
eq1 = MassMatrix*d_vartheta.';
NonLinear_eq = [eq1(1)-Effort(1); eq1(2)-Effort(2); eq1(3)-Effort(3)
; eq1(4)-Effort(4)];

fprintf('*****longitudinal equation***** \n')
NonLinear_eq(1)
fprintf('*****lateral equation***** \n')
NonLinear_eq(2)
fprintf('*****yaw equation***** \n')
NonLinear_eq(3)
fprintf('*****roll equation***** \n')
NonLinear_eq(4)
```

Modèle pour contrôle de stabilité

Linéarisation

Dans cette section, on déduit un modèle linéaire à partir des équations non-linéaires précédentes. On linéarise la dynamique autour de petit angle de braquage $\delta < 0$ et en considérant une vitesse longitudinale constante. Le modèle linéaire obtenu permet de simuler 3 DDF; le déplacement latéral, le lacet et le roulis.

On élimine la dynamique longitudinale, le nouveau vecteur de vitesses généralisées est :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

Rappeler l'expression permettant de linéariser une équation non-linéaire (déjà vu en TD).

```
fprintf('*****Linear dynamics***** \n')

MM_Lateral = MassMatrix(2:4,2:4);
Effort_L = Effort(2:4);

% linearize tire side-slip angle

syms Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t) Vy(t) v_x
tmp1 = subs(alpha_rl,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),t),
    phi(t), delta(t)], [v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)]);
D1 = functionalDerivative(tmp1 , [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta
    (t)]);
D11 = subs(D1, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0 0 0 0])
;
alphaRL_L = D11.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
    delta(t)]

tmp2 = subs(alpha_rr,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),t),
    phi(t), delta(t)], [v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)]);
D2 = functionalDerivative(tmp2 , [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta
    (t)]);
D22 = subs(D2, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0 0 0 0])
;
alphaRR_L = D22.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
    delta(t)]

tmp3 = subs(alpha_fl,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),t),
    phi(t), delta(t)], [v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)]);
D3 = functionalDerivative(tmp3 , [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta
    (t)]);
D33 = subs(D3, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0 0 0 0])
;
alphaFL_L = D33.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
    delta(t)]

tmp4 = subs(alpha_fr,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),t),
    phi(t), delta(t)], [v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)]);
D4 = functionalDerivative(tmp4 , [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta
    (t)]);
D44 = subs(D4, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0 0 0 0])
;
```

```

alphaFR_L = D44.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
    delta(t)]

% linearize mass matrix
for i=1:3
    for j=1:3
        tmp5 = MM_Lateral(i,j);
        tmp6 = subs(tmp5,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),
t), phi(t), delta(t)],[v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t
)]));
        D6 = functionalDerivative(tmp6 ,[Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t)
Delta(t)]);
        D66 = subs(D6, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0
0 0 0]);
        MM_Lateral_L(i,j) = subs(tmp6, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t)
Delta(t)], [0 0 0 0 0]) + ...
            D66.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
delta(t)];
    end
end
MM_Lateral_L

% linearize generalized effort vector

for i=1:3
    tmp7 = Effort_L(i);
    tmp8 = subs(tmp7,[vx(t), vy(t), diff(psi(t),t), diff(phi(t),t),
phi(t), delta(t)],[v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)]);
    D7 = functionalDerivative(tmp8 ,[Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t)
Delta(t)]);
    D77 = subs(D7, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)], [0 0 0 0
0]);
    Effort_L1(i) = subs(tmp8, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t) Delta(t)
]), [0 0 0 0 0]) + ...
        D77.'*[vy(t); diff(psi(t),t); diff(phi(t),t); phi(t);
delta(t)];
end
Effort_L1

```

Le modèle linéaire est mis sous forme d'une représentation de l'espace d'état où X est le vecteur d'état:

$$EE.X = A.X + B.u \quad X = \begin{bmatrix} v_y \\ \dot{\psi} \\ \dot{\phi} \\ \phi \end{bmatrix} \quad u = \delta$$

```

% matrix generation for the state space representation

```

```

EE = MM_Lateral_L
Effort_L2 = subs(Effort_L1, [Fy_rr, Fy_rl, Fy_fr, Fy_fl, Fx_rr,
    Fx_rl, Fx_fr, Fx_fl, tau_R], ...
    [c_r*alphaRR_L, c_r*alphaRL_L, c_f*alphaFR_L, c_f*alphaFL_L, 0,
    0, 0, 0, K_r*phi(t)+D_r*diff(phi(t),t)]);

tmp9 = subs([Effort_L2, diff(phi(t),t)], [vx(t), vy(t), diff(psi(t),
    t), diff(phi(t),t), phi(t), delta(t)], [v_x, Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t)
    ) Phi(t) Delta(t)]);

tmp10 = equationsToMatrix(tmp9, [Vy(t), Dpsi(t) Dphi(t) Phi(t)]);
tmp11 = equationsToMatrix(tmp9, Delta(t));

A = -tmp10;
B = -tmp11;

```

Modèle véhicule sans roulis

Dans cette section, on exprime la dynamique non-linéaire du véhicule sans le mouvement de roulis à partir du modèle global. Le modèle résultant est utile pour analyser la dynamique et la stabilité du mouvement de lacet. Le nouveau vecteur de vitesses généralisé est :

$$\vartheta = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

```

fprintf('*****Vehicle model without roll***** \n'
)

vartheta = [vx(t) vy(t) diff(psi(t),t)]
d_vartheta = diff(vartheta,t)
MM_no_roll = MassMatrix(1:3,1:3);
Effort__no_roll = Effort(1:3);
eq1 = MM_no_roll*d_vartheta.';
NonLinear_eq = [eq1(1)-Effort__no_roll(1); eq1(2)-Effort__no_roll(2)
; eq1(3)-Effort__no_roll(3)];
tmp1 = subs(NonLinear_eq, [phi(t) diff(phi(t),t)], [Phi(t) Dphi(t)]
;
NonLinear_eq = subs(tmp1, [Phi(t) Dphi(t)], [0 0]);
fprintf('*****longitudinal equation***** \n')
NonLinear_eq(1)
fprintf('*****lateral equation***** \n')
NonLinear_eq(2)
fprintf('*****yaw equation***** \n')
NonLinear_eq(3)

```

L'équation du lacet obtenue en considérant 4 roues peut se mettre sous la forme:

$$I_z \ddot{\psi} = M_z + \Delta M_z$$

On considère que:

$$\Delta F_{x,r} = F_{x,rl} - F_{x,rr}$$

$$\Delta F_{x,f} = F_{x,fl} - F_{x,fr}$$

$$\Delta F_{y,f} = F_{y,fl} - F_{y,fr}$$

$$F_{y,r} = F_{y,rl} + F_{y,rr}$$

$$F_{y,f} = F_{y,fl} + F_{y,fr}$$

$$F_{x,f} = F_{x,fl} + F_{x,fr}$$

Déduire l'expression de M_z et de ΔM_z .

Modèle véhicule deux-roues équivalent

A partir de la section précédente, exprimer la dynamique de véhicule deux-roues équivalente permettant de simuler les 2 DDL: le déplacement latéral et le lacet. Linéariser et mettre la dynamique sous forme de représentation en espace d'état. Comparer le modèle obtenu avec celui de TD.