Corrigés[1] des exercices de la feuille 2

Exercice 1.

a) Pour $x \in]-1,1[$, on a $\lim_{n\to+\infty} x^n = 0$. Si $x = 1$, on a $x^n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et si $x = -1$, la suite $\Big((-1)^n\Big)$ ne converge pas. De même, si $|x| > 1$, la suite (x^n) ne converge pas non plus car la suite $(|x|^n)$ diverge.

On déduit de tout cela que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $]-1,1]$ et que la fonction limite f est définie sur $]-1,1]$ par $f(x) = 0$ si $x \in]-1,1[$ et $f(1) = 1$.

b) Pour tout $x \in [-1,1]$, on a la majoration $\dfrac{|x^n|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour $x \in [-1,1]$. Si $|x| > 1$, il est clair que $\lim_{n\to+\infty} |f_n(x)| = +\infty$ par croissances comparées. Il résulte de cette courte étude que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[-1,1]$ seulement et que la fonction limite f est la fonction nulle sur cet intervalle $[-1,1]$.

c) Si $x = 0$, on a $f_n(x) = 1$ pour tout $n \geq 1$. Si $x > 0$, on a $n^x = e^{x\ln(n)} \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$. Pour $x < 0$, on a $n^x = e^{x\ln(n)} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $]-\infty,0]$ et que la fonction limite f est définie sur $]-\infty,0]$ par $f(x) = 0$ si $x \in]-\infty,0[$ et $f(0) = 1$.

d) On remarque que $f_n(x) = (xe)^n$. Il résulte alors de l'étude faite en a) que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement sur $]-1/e,1/e]$ et que la fonction limite f est définie sur $]-1/e,1/e]$ par $f(x) = 0$ si $x \in]-1/e,1/e[$ et $f(1/e) = 1$.

e) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a la majoration $\dfrac{|\sin(n^2x)|}{n} \leq \dfrac{1}{n}$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$. On peut donc affirmer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la fonction limite f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

f) Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$. Si $x \neq 0$, on a $\sin(x/n) \sim x/n$ quand $n \to +\infty$, autrement dit on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. On en déduit que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la fonction limite f est définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = x$ pour $x \neq 0$, autrement dit f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$.

g) On rappelle le développement limité $\cos(u) = 1 - u^2/2 + u^2\epsilon(u)$ avec $\lim_{u\to 0} \epsilon(u) = 0$. On a donc, pour x fixé $\neq 0$, $\cos(x/n) - 1 \sim -x^2/(2n^2)$ quand $n \to +\infty$ et, finalement, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = -x^2/2$. Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$. Il résulte de cette étude que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et que la fonction limite f est définie par $f(x) = -x^2/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Pour tout $x \geq 0$ fixé, il est clair que $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{x}{x+n} = 0$. Autrement dit, pour tout $x \geq 0$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers 0. On dit encore que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur l'intervalle $[0,+\infty[$ vers la fonction f identiquement nulle.

2. On fixe $n \geq 1$ et on étudie les variations de f_n. Il est clair que f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, que $f_n(0) = 0$ et que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 1$.

   Il en résulte que $||f_n - f||_{\infty,[0,+\infty[} = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - 0| = 1$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[0,+\infty[} = 1 \neq 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

[1] N'hésitez pas à signaler les erreurs. Ce sera un plaisir de les corriger.

3. Soit $a > 0$ fixé quelconque. Comme les fonctions f_n sont strictement croissantes et positives sur $[0, a]$, on a $||f_n - f||_{\infty,[0,a]} = \sup_{x\in[0,+\infty[} |f_n(x) - 0| = f_n(a) = \dfrac{a}{a+n}$ pour tout $n \geq 1$. On a donc $\lim_{n\to+\infty} ||f_n - f||_{\infty,[0,a]} = 0$. Donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur l'intervalle $[0, a]$ vers la fonction nulle f.

   Remarquez que, dans cet exemple, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur tous les intervalles $[0, a]$ mais ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$ entier et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = n \ \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. On fixe x dans $[0, +\infty[$.

   si $x = 0$, on a $f_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$.

   Si $x > 0$, on rappelle un équivalent de $\arctan(u)$ en 0 : $\arctan(u) \sim u$ quand $u \to 0$. On en déduit que $f_n(x) \sim n\,\dfrac{x}{n} = x$ quand $n \to +\infty$.

   On a montré que dans tous les cas $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = x$. Donc, la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.

2. a) Pour tout u réel, on a $1 - \dfrac{1}{1+u^2} = \dfrac{1+u^2-1}{1+u^2} = \dfrac{u^2}{1+u^2}$ et on a $0 \leq \dfrac{u^2}{1+u^2} \leq u^2$ en minorant le dénominateur par 1.

   On intègre alors cet encadrement entre 0 et v réel ≥ 0 et on obtient : $0 \leq v - \arctan(v) \leq \dfrac{v^3}{3}$.

   b) Soit a un réel > 0. En utilisant l'inégalité précédente, on remplace v par x/n et on obtient $0 \leq \dfrac{x}{n} - \arctan\left(\dfrac{x}{n}\right) \leq \dfrac{x^3}{3n^3}$. On multiplie tout par n et il en résulte :

$$0 \leq x - f_n(x) \leq \frac{x^3}{3n^2} \leq \frac{a^3}{3n^2}$$

   pour tout $x \in [0, a]$. On en déduit $\|f - f_n\|_{\infty,[0,a]} = \sup_{x\in[0,a]} |f(x) - f_n(x)| \leq \dfrac{a^3}{3n^2}$. Cela entraine que $\lim_{n\to+\infty} \|f - f_n\|_{\infty,[0,a]} = 0$. La suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge donc uniformément sur $[0, a]$ vers f.

3. On remarque que les fonctions f_n sont bornées sur $[0, +\infty[$. On a en effet $0 \leq f_n(x) \leq n\,\frac{\pi}{2}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$. Mais la fonction limite f de la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$. On en déduit que pour tout $n \geq 1$, $\|f - f_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = +\infty$ et donc la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4.

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leq f_n(x) = \dfrac{1}{n^3 + x^2} \leq \dfrac{1}{n^3}$. Comme la série des majorants $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^3}$ est une série convergente (série de Riemann de paramètre 3 avec $3 > 1$), on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b) Pour tout $x \in [-a, a]$, si $n \geq a$, on a $(n - x)^2 \geq (n - a)^2 = n(n - 2a) + a^2 \geq n(n - 2a)$. On en déduit que, pour tout $x \in [-a, a]$, pour tous les $n \geq 2a + 1$, on a $(x - n)^2 \geq n$, et donc

$0 \leq f_n(x) = e^{-(x-n)^2} \leq e^{-n}$. Comme la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 2a+1} e^{-n}$ converge (sa raison e^{-1} est positive et < 1), on en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $[-a, a]$.

c) Pour tout $x \in]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$, on a $x^2 \geq a^2$ et donc, pour tout $n \geq 0$, on a $0 \leq f_n(x) = e^{-n^2x^2} \leq e^{-n^2a^2} \leq e^{-na^2}$. Comme la série géométrique $\displaystyle\sum_{n\geq 0}(e^{-a^2})^n$ converge (sa raison e^{-a^2} est positive et < 1), on en déduit que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $]-\infty, a] \cup [a, +\infty[$.

d) On remarque que $f_n(0) = 1$ pour tout $n \geq 0$. On a donc $||f_n||_{\infty,[-a,a]} \geq f_n(0) = 1$, pour tout $n \geq 0$. Il en résulte que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} ||f_n||_{\infty,[-a,a]}$ diverge grossièrement, et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ ne converge pas normalement sur $[-a, a]$.

Exercice 5.

1. On rappelle que pour tout $u \geq 0$, on a $0 \leq \arctan(u) < \pi/2$. On a donc, pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leq u_n(x) \leq \pi/(2n^2)$. Comme la série des majorants $\displaystyle\frac{\pi}{2}\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ est une série de Riemann convergente, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

2. Les fonctions u_n sont infiniment dérivables sur $[0, +\infty[$ et on a $u_n'(x) = \frac{1}{n^2}\frac{n}{1+(nx)^2} = \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$.

   Soit $a > 0$ fixé. Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [a, +\infty[$, on a $0 \leq u_n'(x) \leq \frac{1}{n(1+n^2a^2)} \leq \frac{1}{n^3a^2}$. Comme la série des majorants $\displaystyle\frac{1}{a^2}\sum_{n\geq 1} 1/n^3$ est une série de Riemann convergente, la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

3. Les fonctions u_n sont toutes continues sur $[0, +\infty[$ et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ (cf question 1). On en déduit que la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

   De plus, les fonctions u_n sont toutes de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ (cf question 2), ceci pour tout $a > 0$. On en déduit que la fonction somme $S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est de classe C^1 sur $]a, +\infty[$, ceci pour tout $a > 0$. Il en résulte que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $\displaystyle S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(1+n^2x^2)}$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

   Remarque Attention ! La série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ ne converge pas normalement sur $]0, +\infty[$ (bien qu'elle converge normalement sur tous les $]a, +\infty[$ où $a > 0$). En effet, on a $||u_n'||_{\infty,]0,+\infty[} = \sup_{x>0} |u_n'(x)| = \frac{1}{n}$ et la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Le raisonnement précédent nous a permis de tourner cette difficulté (**méthode à retenir**) : on a établi la convergence normale sur tous les $]a, +\infty[$ de la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ où $a > 0$ est quelconque, puis on en a déduit que la fonction somme S est de classe C^1 sur tous les $]a, +\infty[$ et donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.

1. Les fractions rationnelles $x \mapsto \frac{1}{n-x}$ et $x \mapsto \frac{1}{n+x}$ sont toutes définies, continues, dérivables et même infiniment dérivables sur $]-2, 2[$ (car $n \geq 2$), donc de classe C^1 sur $[0, 1]$. En réduisant

au même dénominateur, on a $u_n(x) = \frac{2x}{n^2-x^2}$ et donc $0 \le u_n(x) \le \frac{2}{n^2-x^2} \le \frac{2}{n^2-1}$ pour tout $x \in [0,1]$. (On a majoré le numérateur et minoré le dénominateur).

On a $\frac{1}{n^2-1} \sim \frac{1}{n^2} (> 0)$ quand $n \to +\infty$. Le critère d'équivalence s'applique donc et dit que la série $\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n^2-1}$ est de même nature que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ qui converge. On en déduit que la série des majorants $2\sum_{n\ge 2} \frac{1}{n^2-1}$ converge, et donc la série de fonctions $\sum_{n\ge 2} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

2. Comme la série de fonctions $\sum_{n\ge 2} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, elle converge a fortiori simplement sur $[0,1]$. On peut donc définir la fonction somme $u = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n$sur l'intervalle $[0,1]$.

   On rappelle tout d'abord que les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $[0,1]$ et on a $u_n'(x) = \frac{1}{(n-x)^2} + \frac{1}{(n+x)^2}$. On a la majoration $0 \le u_n'(x) \le \frac{1}{(n-1)^2} + \frac{1}{n^2} \le \frac{2}{(n-1)^2}$ pour tout $x \in [0,1]$. La série des majorants $2\sum_{n\ge 2} \frac{1}{(n-1)^2} = 2\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente. Donc la série des dérivées $\sum_{n\ge 2} u_n'$ converge normalement sur $[0,1]$

   On en déduit que la fonction somme u est de classe C^1 sur $[0,1]$ et que $u'(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n'(x)$ pour tout $x \in [0,1]$.

3. Comme les fonctions u_n sont continues sur $[0,1]$ et comme la série de fonctions $\sum_{n\ge 2} u_n$ converge normalement sur $[0,1]$, on peut intervertir intégrale entre 0 et 1 et série :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(x)\,dx &= \int_0^1 \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \int_0^1 u_n(x)\,dx \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\Big[-\ln(n-x) - \ln(n+x)\Big]_0^1\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right)
\end{aligned}$$

4. On reconnait une somme télescopique. On a donc

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} \left(\ln\left(\frac{n}{n-1}\right) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) &= \ln\left(\frac{2}{2-1}\right) - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) \\
&= \ln(2) - \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right)
\end{aligned}$$

   On fait alors tendre N vers $+\infty$ et on obtient $\displaystyle\int_0^1 u(x)\,dx = \ln(2)$.

Exercice 7.

On fait le changement de variable linéaire $u = t\sqrt{x}$. On a donc

$$\int_0^A \frac{1}{1+t^2x}\,dt = \int_0^{A\sqrt{x}} \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{\sqrt{x}} = \frac{\arctan(A\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

On fait alors tendre A vers $+\infty$ et on obtient $I(x) = \pi/(2\sqrt{x})$.

1. On travaille ici à x fixé > 0. Pour tout $n \ge 0$, on a $u_n(x) > 0$. On a l'équivalence $u_n(x) \sim \dfrac{1}{n^2x}$ quand $n \to +\infty$. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2}$ converge, le théorème d'équivalence dit que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n(x)$ converge également. On a montré que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\ge 0} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$ et on peut donc définir sur $]0,+\infty[$ la fonction somme S de cette série de fonctions.

2. Pour tout $n \geq 0$, les fonctions u_n sont décroissantes sur $]0,+\infty[$. Soient $x, y \in]0,+\infty[$ avec $x \leq y$. On a $u_n(x) \geq u_n(y)$ pour tout $n \geq 0$, et donc $\sum_{n=0}^{N} u_n(x) \geq \sum_{n=0}^{N} u_n(y)$. On fait alors tendre N vers $+\infty$ et on obtient $S(x) \geq S(y)$. On a montré que S est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. **(Ceci est une question plus difficile. Cela pourrait être un résultat de cours.)** Soit $\epsilon > 0$ donné. Pour tout $x \geq 1$, on écrit $S(x) = 1 + \sum_{n=1}^{N} u_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n(x)$ avec $0 \leq u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x} \leq \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ (pour $n \geq 1$). On en déduit que, pour $x \geq 1$, on a $0 \leq S(x) - 1 \leq \sum_{n=1}^{N} u_n(x) + \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge, son reste $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On peut donc trouver N assez grand, qu'on note n_ϵ, tel que $\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < \epsilon$. On a donc $0 \leq S(x) - 1 \leq \sum_{n=1}^{n_\epsilon} u_n(x) + \epsilon$ pour tout $x \geq 1$.

   On voit que la somme **finie** de fonctions $\sum_{n=1}^{n_\epsilon} u_n(x)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$ car, pour tout $n \geq 1$, les fonctions $u_n(x) = \frac{1}{1+n^2x}$ tendent vers 0 quand $x \to +\infty$. Il existe donc un réel $B \geq 1$ tel que pour tout $x \geq B$, on ait $0 \leq \sum_{n=1}^{n_\epsilon} u_n(x) \leq \epsilon$.

   Il en résulte que, pour $\epsilon > 0$ donné, il existe $B \geq 1$ tel que pour tout $x \geq B$ on ait $0 \leq S(x) - 1 \leq 2\epsilon$. On a bien montré que $S(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

4. **(La méthode expliquée ici est bien classique. C'est une comparaison série/intégrale.)** Soit x fixé > 0. On remarque que la fonction (de t) $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2x}$ est décroissante et continue sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que pour tout $k \geq 0$, on a $\int_k^{k+1} h(t)\,dt \leq h(k) = \frac{1}{1+k^2x}$ et, pour tout $k \geq 1$, on a $\frac{1}{1+k^2x} = h(k) \leq \int_{k-1}^{k} h(t)\,dt$. En sommant ces inégalités, on obtient d'une part

$$\int_0^{n+1} h(t)\,dt = \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} h(t)\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2x}$$

   et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{1+k^2x} &= 1 + \sum_{k=1}^{n} h(k) \\ &\leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \int_{k-1}^{k} h(t)\,dt \\ &\leq 1 + \int_0^{n} h(t)\,dt \end{aligned}$$

On a établi, pour tout $n \geq 0$, l'encadrement

$$\int_0^{n+1} \frac{1}{1+t^2x}\,dt \leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leq 1 + \int_0^{n} \frac{1}{1+t^2x}\,dt$$

On fait alors tendre n vers $+\infty$ et on obtient l'encadrement $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$ où $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2x}\,dt = \frac{\pi}{2\sqrt{x}}$.

5. D'après l'encadrement précédent, on a $1 \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{\pi} S(x) \leq \dfrac{2\sqrt{x}}{\pi} + 1$. Quand $x \to 0^+$, les membres de gauche et de droite tendent vers 1. Grâce au théorème des gendarmes, le terme central $\dfrac{2\sqrt{x}}{\pi} S(x)$ tend aussi vers 1 quand $x \to 0^+$. On a montré que $S(x) \sim \dfrac{\pi}{2\sqrt{x}}$ quand $x \to 0^+$.

6. Soit a un réel > 0. On a facilement : $||u_n||_{\infty,[a,+\infty[} = \displaystyle\sup_{x\in[a,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(a) = \frac{1}{1+n^2a}$.
   On a déjà établi que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n(a)$ converge. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} ||u_n||_{\infty,[a,+\infty[}$ converge donc. On dit alors que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

7. Soit a un réel > 0. Les fonctions u_n sont continues sur $[0, +\infty[$ donc sur $[a, +\infty[$. Et la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$. On en déduit que la fonction somme S est continue sur $[a, +\infty[$. Comme $a > 0$ était quelconque, S est continue sur tous les intervalles $[a, +\infty[$, donc S est continue sur $]0, +\infty[$. **(Ceci est une astuce à connaître.)**

Exercice 8.

Pour tout $n \geq 1$ entier, on note w_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $w_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et v_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$v_n(x) = (-1)^{n-1} w_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{x^2+n^2}.$$

1. On fixe x dans $[0, +\infty[$.
   Si $x = 0$, on a $v_n(0) = 0$ pour tout $n \geq 1$, donc $\sum_{n\geq 1} v_n(0)$ converge.
   (1ère méthode) Si $x > 0$, on majore $|v_n(x)| \leq \dfrac{x}{x^2+n^2} \leq \dfrac{x}{n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ converge, par comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x)$ converge absolument, donc elle converge.
   (2e méthode) On constate que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x}{x^2+n^2}$ est une série alternée car $w_n(x) = \frac{x}{x^2+n^2}$ est > 0 pour tout $n \geq 1$. Cette série alternée vérifie les hypothèses du critère des séries alternées. En effet, il est évident que la suite $\left(\dfrac{x}{x^2+n^2}\right)_{n\geq 1}$ décroît (en n) et que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{x^2+n^2} = 0$. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1} \frac{x}{x^2+n^2}$ converge donc.
   On a montré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a) On étudie les variations de la fonction w_n sur $[0, +\infty[$. On a $w_n'(x) = \dfrac{1.(x^2+n^2) - x.(2x)}{(x^2+n^2)^2} = \dfrac{(n-x)(n+x)}{(x^2+n^2)^2}$. Il en résulte que $w_n'(x) \geq 0$ sur $[0, n]$ et $w_n'(x) \leq 0$ sur $[n, +\infty[$. La

fonction w_n est donc croissante sur $[0, n]$ et décroissante sur $[n, +\infty[$. On $w_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} w_n(x) = 0$, ce qui complète le tableau des variations de w_n.

b) Il résulte du tableau des variations de w_n que $\|w_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sup_{x\in[0,+\infty[} |w_n(x)| = w_n(n) = \dfrac{1}{2n}$. Comme la série numérique $\sum_{n\geq 1} \|w_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2n}$ diverge, il en résulte que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

Remarque. En revanche, on peut montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur tous les intervalles $[0, a]$. En effet, on fixe $a > 0$. Pour tous les entiers $n > a$, on regarde le tableau de variation de w_n et on voit que $\|v_n\|_{\infty,[0,a]} = \|w_n\|_{\infty,[0,a]} = \sup_{x\in[0,a]} |w_n(x)| = w_n(a) = \dfrac{a}{a^2 + n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Bien sûr, pour les entiers $n \leq a$, on a en regardant le tableau de variations de w_n : $\|v_n\|_{\infty,[0,a]} = \dfrac{1}{2n}$. Mais cela ne concerne qu'un nombre fini d'entiers n. La série numérique $\sum\limits_{n\geq 1} \|v_n\|_{\infty,[0,a]} = \sum\limits_{1\leq n\leq a} \|v_n\|_{\infty,[0,a]} + \sum\limits_{n\geq a} \|v_n\|_{\infty,[0,a]}$ converge donc, et la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur $[0, a]$.

3. Comme la série $\sum_{n\geq 1} v_n(x) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1} w_n(x)$ est une série alternée qui vérifie les hypothèses du critère des séries alternées, on peut grâce au **bonus du critère des séries alternées (voir le polycopié de cours OLMA201 page 27 sur Ecampus)** en déduire la majoration[2] suivante de la valeur absolue du reste d'ordre n de la série :

$$|R_n(x)| = |\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x}{x^2 + k^2}| \leq \frac{x}{x^2 + (n+1)^2} = w_{n+1}(x)$$

pour tout $x > 0$. Cette inégalité est vraie aussi pour $x = 0$ (où, dans ce cas, tout est nul).

On utilise alors la majoration de w_{n+1} obtenue en 2) : $w_{n+1}(x) \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$. On en déduit que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $|R_n(x)| \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$ et donc $\|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} \leq \dfrac{1}{2(n+1)}$. Finalement, on a $\lim_{n\to+\infty} \|R_n\|_{\infty,[0,+\infty[} = 0$ et donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9

1. On note déjà que $u_n(0) = 0$ et donc $\sum_{n\geq 1} u_n(0)$ converge. Si x est fixé > 0, on a $u_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n^{\alpha+1}x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\alpha+1}x}$. La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+1}}$ converge car $\alpha > 0 \Longrightarrow \alpha + 1 > 1$. Comme $u_n(x) > 0$, le théorème d'équivalence s'applique et on peut conclure que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a) On dérive u_n : $u_n'(x) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. On en déduit : $u_n'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$. Donc u_n est croissante sur $[0, \frac{1}{\sqrt{n}}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{\sqrt{n}}, +\infty[$. Par ailleurs, on a $u_n(0) = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$.

b) D'après le tableau des variations de u_n, celle-ci admet un maximum en $x = 1/\sqrt{n}$. On a

$$\sup_{x\in[0,+\infty[} |u_n(x)| = u_n(1/\sqrt{n}) = \frac{1}{2n^{\alpha+\frac{1}{2}}}.$$

[2] Attention ! Cette majoration simple du reste R_n de rang n de la série n'est valable que pour les séries qui vérifient les hypothèses du critère des séries alternées.

La série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{2}}}$ converge si et seulement si $\alpha > 1/2$. On en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1/2$.

On fixe maintenant $\alpha = 1$ pour la suite de l'exercice.

3. a) On considère la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u'_n$. On a vu que $u'_n(x) = \dfrac{1}{n}\dfrac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. On en déduit

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1+nx^2}{n(1+nx^2)^2} = \frac{1}{n(1+nx^2)}$$

pour tout $x \geq 0$. Soit a un réel > 0. On a donc, pour tout $x \in [a, +\infty[$ (et a fortiori pour tout $x \in [a, b]$), la majoration

$$|u'_n(x)| \leq \frac{1}{n(1+na^2)} \leq \frac{1}{a^2 n^2}.$$

Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u'_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.

b) La série de fonctions $\sum u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$, les fonctions u_n sont de classe C^1 sur $[0, +\infty[$ et la série des dérivées $\sum u'_n$ converge normalement sur tous les intervalles $[a, b[] \subset]0, +\infty[$. Il en résulte que S est de classe C^1 sur tous les intervalles $]a, b[$ et donc de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

4. a) Comme les $u_n(x)$ sont > 0 pour tout $x > 0$, on en déduit que pour tout entier $p \geq 1$, on a $\dfrac{S(x)}{x} \geq \displaystyle\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(1+nx^2)}$ pour tout $x > 0$. En particulier pour $x = 1/\sqrt{p}$, on obtient

$$\sqrt{p}S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(1+\frac{n}{p})}.$$

b) Pour tous les $1 \leq n \leq p$, on a $1 + \frac{n}{p} \leq 2$. Il en résulte

$$\frac{S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{p}}} \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{2n}.$$

Lorsque p tend vers $+\infty$, le membre de droite tend vers $+\infty$ car la série harmonique $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. Par comparaison et puisque $S(0) = 0$, on a

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) - S(0)}{\frac{1}{\sqrt{p}}} = +\infty$$

et S n'est donc pas dérivable (à droite) en 0.

Attention ! Ce qui suit est un peu hors du programme. *Il utilise le théorème suivant : soit une série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ où les u_n sont des fonctions définies sur $[b, +\infty[$ à valeurs réelles. On suppose que pour tout $n \geq 0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = a_n$ et que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[b, +\infty[$. Alors la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n$ converge et on a* *(interversion limite-série)* $\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}u_n(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$. *On a démontré ce résultat dans un cas particulier à l'exercice 7 question 3.*

5. a) On a $v_n(x)=xu_n(x)=\dfrac{x^2}{n(1+nx^2)}$. Pour étudier la convergence normale de la série $\sum_{n\geq 1}v_n$ sur $[0,+\infty[$, il suffit d'étudier les variations de v_n sur $[0,+\infty[$ pour calculer $||v_n||_{\infty,[0,+\infty[}$. Mais il est ici plus rapide de constater que $0\leq v_n(x)=\dfrac{1}{n^2}\dfrac{nx^2}{1+nx^2}\leq\dfrac{1}{n^2}$, pour tout $x\in[0,+\infty[$. Comme la série de Riemann $\sum_{n\geq 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}v_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$.

   b) Pour chaque $n\geq 1$, on a $v_n(x)=\dfrac{x^2}{n^2x^2(1+1/(nx^2))}$ et donc $\lim_{x\to+\infty}v_n(x)=\dfrac{1}{n^2}$. Par ailleurs, on a montré que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1}v_n$ converge normalement sur $[0,+\infty[$. Il en résulte que $\lim_{x\to+\infty}xS(x)=\lim_{x\to+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty}v_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\lim_{x\to+\infty}v_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$. On en déduit $S(x)\sim\dfrac{\pi^2}{6x}$ quand $x\to+\infty$.