Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 3 : Intégrale des fonctions positives (Partie 2)

Correction

Correction 1.

1. La fonction f est mesurable positive donc son intégrale de Lebesgue est bien définie et à valeur dans $[0, \infty]$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction tronquée $f_n = f\mathbb{1}_{[1/n,1]}$. On a

$$\int_{[1/n,1]} f d\lambda = \int_{]0,1]} f_n d\lambda.$$

La fonction f est toujours continue sur le segment $[\frac{1}{n}, 1]$, donc on va calculer l'intégrale de f_n en utilisant une primitive (proposition 3.18 du cours).

Isolons d'emblée le cas $a = -1$, pour lequel les primitives de $x \mapsto x^a$ ont une forme particulière, $x \mapsto \ln(x) + C$. Dans ce cas, on a

$$\int_{]0,1]} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{[1/n,1]} x^a \mathrm{d}x = -\ln(1/n) = \ln(n).$$

Si $a \neq -1$, alors les primitives de $x \mapsto x^a$ sont $x \mapsto \frac{1}{a+1}x^{a+1}$, et on a

$$\int_{]0,1]} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{[1/n,1]} x^a \mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}\left(1 - n^{-1-a}\right).$$

3. On a convergence simple croissante (car $f \geq 0$ et la suite d'intervalles $[1/n, 1]$ est croissante, de réunion $]0, 1]$) de la suite de fonctions positives (f_n) vers f, donc l'intégrale de f est la limite, lorsque $n \to +\infty$, des expressions précédentes.

Si $a = -1$, alors puisque $\ln(n) \to +\infty$ on retrouve bien

$$\int_{]0,1]} \frac{1}{x} \mathrm{d}\lambda(x) = +\infty.$$

Lorsque $a > -1$, on a $n^{-1-a} \to 0$ lorsque $n \to \infty$, d'où

$$\int_{]0,1]} x^a \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{a+1}\,.$$

Lorsque $a < -1$, on a $n^{-1-a} \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$ d'où, puisque $a + 1 < 0$,

$$\int_{]0,1]} x^a \mathrm{d}\lambda(x) = +\infty\,.$$

Correction 2. On va utiliser un critère séquentiel et montrer que pour tout suite croissante (x_n) de réels $\geq a$, on a $(F(x_n))$ converge vers $\int_{[a,\infty[} f \mathrm{d}\lambda - F(a)$.

Soit donc (x_n) une suite croissante (x_n) de réels $\geq a$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n = f\mathbb{1}_{[a,x_n]}$. Comme f est positive et que la suite des intervalles $([a, x_n])$ est croissante pour l'inclusion de réunion $[a, \infty[$, la suite (f_n) est croissante et converge simplement vers f. De plus les f_n sont mesurables positives pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par le théorème de convergence monotone, la suite $\left(\int_{[a,\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda\right)$ converge vers $\int_{[a,\infty[} f \mathrm{d}\lambda$. Or on connaît une primitive de f (qui est continue). Ainsi, sur le segment $[a, x_n]$, on a

$$\int_{[a,\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{[a,x_n]} f \mathrm{d}\lambda = F(x_n) - F(a).$$

Par conséquent $(F(x_n))$ converge vers $\int_{[a,\infty[} f \mathrm{d}\lambda - F(a)$. On obtient le résultat voulu par caractérisation séquentielle de la limite.

Correction 3. Toutes les fonctions considérées sont (continues) à valeurs positives, donc leur intégrale est bien définie, éventuellement à valeurs $+\infty$.

Pour calculer chacune de ces intégrales, on va appliquer le théorème de convergence monotone. Pour une fonction continue positive $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$, le théorème de convergence monotone s'applique pour montrer qu'on peut calculer l'intégrale de f sur $[0, +\infty[$ à partir d'intégrales de f sur des segments :

$$\int_{[0,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int f\mathbb{1}_{[0,n]} \mathrm{d}\lambda\,.$$

Reste à calculer l'intégrale de la fonction continue f sur chaque segment $[0, n]$. Pour cela, on utilise la proposition 3.18 du cours (utilisation de primitive et intégration par parties).

Des primitives de $x \mapsto xe^{-x^2}$ et $x \mapsto e^{-x}$ sont respectivement $x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x^2}$ et $x \mapsto -e^{-x}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{[0,n]} xe^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1 - e^{-n^2})\,, \qquad \int_{[0,n]} e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - e^{-n}.$$

On en déduit

$$\int_{[0,+\infty[} xe^{-x^2} \mathrm{d}\lambda(x) = \frac{1}{2}\,, \qquad \int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} \mathrm{d}\lambda(x) = 2$$

où, pour le second calcul, on a utilisé le caractère pair de la fonction $x \mapsto e^{-|x|}$, ainsi que les propriétés d'invariance de l'intégrale (proposition 3.25, symétrie) pour se réduire à l'intégrale sur $[0, +\infty[$.

Pour intégrer la fonction $x \mapsto xe^{-x}$, nous procédons par intégrations par parties (ce qui permettrait également d'en donner une primitive). On obtient

$$\int_{[0,n]} xe^{-x} \mathrm{d}x = [-xe^{-x}]_0^n + \int_{[0,n]} e^{-x} \mathrm{d}x = 1 - (n + 1)e^{-n}.$$

Alors, par croissances comparées, la limite vaut

$$\int_{[0,+\infty[} xe^{-x} \mathrm{d}\lambda(x) = 1.$$

Correction 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \exp\left(-\frac{nx + x^2 + \sin^2(x)}{n}\right).$$

Montrons que la suite (f_n) est croissante. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \geq 0$. Alors $\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$ et $x^2 + \sin^2(x) \geq 0$ d'ou

$$-x - \frac{x^2 + \sin^2(x)}{n} \leq -x - \frac{x^2 + \sin^2(x)}{n+1}$$

et donc, par croissance de la fonction exponentielle $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$. Donc (f_n) est croissante. Montrons maintenant que (f_n) converge simplement vers $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-x}$. Soit $x \geq 0$. On a $\lim_{n\to\infty} -x - \frac{x^2+\sin^2(x)}{n} = -x$ d'où $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = e^{-x}$ par continuité de l'application exponentielle. Donc (f_n) converge simplement vers f. Enfin on remarque que la suite (f_n) est une suite de fonctions (mesurables) positives. En utilisant, le théorème de convergence monotone (sur $[0, \infty[$), on obtient

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,\infty[} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty[} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,k]} f \mathrm{d}\lambda.$$

Comme $x \mapsto \exp(-x)$ est une fonction continue, on peut calculer son intégrale sur tout segment à l'aide d'une primitive, ici $x \mapsto -e^{-x}$. Il vient

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \lim_{k\to+\infty} \int_{[0,k]} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{k\to\infty} (1 - \exp(-k)) = 1.$$

Correction 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $f_n :]0, 1] \to \mathbb{R}^+$ donnée par $f_n(x) = \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1}$. On vérifie les hypothèses du théorème de convergence monotone pour échanger la limite avec l'intégrale. La suite de fonctions est bien positive et croissante car pour chaque $x \in]0, 1]$ fixé on a que

$$\frac{d}{dn}\left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} = \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-2} \frac{e^x}{n^2} > 0.$$

En plus, on a que $f_n(x) \to x^{-a}$ simplement pour tout $x \in]0, 1]$ car

$$\lim_{n\to+\infty} \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} = x^{-a}.$$

Ainsi, d'après le théorème de convergence monotone et l'exercice 1

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{]0,1]} \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} d\lambda(x) &= \int_{]0,1]} \lim_{n\to+\infty} \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} d\lambda(x) \\
&= \int_{]0,1]} x^{-a}\, d\lambda(x) \\
&= \begin{cases} +\infty, & \text{si } a \geq 1 \\ \frac{1}{1-a}, & \text{si } a < 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Correction 6. Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère $g_n = f_0 - f_n$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fonctions mesurables positives, on a que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également une suite croissante de fonctions mesurables positives. En plus $g_n \to f_0 - f_n$ lorsque $n \to +\infty$. En appliquant le théorème de convergence monotone à la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} g_n d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} (f_0 - f) d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda + \int_{\mathbb{R}} (-f) d\lambda \\
&= \int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f d\lambda.
\end{aligned}$$

Comme $\int_{\mathbb{R}} g_n d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda - \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}} f_0 d\lambda < \infty$ on obtient le résultat.

Correction 7. D'abord, on fait la remarque que toutes les fonctions considérées ci-dessous sont mesurables. Pour chacune d'entre elles, il reste à vérifier si leur module est d'intégrale finie.

1. **Intégrable.** L'exponentielle et la racine carrée sont toutes les deux des fonctions positives sur le domaine considéré donc f est positive. Pour tout $t \in [1, \infty[$, on note que, puisque $\sqrt{t} \geq 1$, on a $\frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \leq e^{-t}$. Or $t \mapsto e^{-t}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ (c'est une intégrale de référence). Donc f est intégrable.
2. **Intégrable.** Puisque g est à valeurs dans $\mathbb{C}$, on vérifie que $|g|$ est intégrable. Or, pour tout $t \geq 1$, on a $|g(t)| = e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ (c'est une intégrale de référence). Donc g est intégrable.
3. **Non-intégrable.** On note d'abord que pour tout $t \geq 1$, on a :
$$1 + t^2 \leq 2t^2 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{t\sqrt{2}} \leq h(t) \tag{1}$$
Or $t \mapsto \frac{1}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$ (c'est une intégrale de référence). Donc h n'est pas intégrable.
4. **Intégrable.** Pour tout $t \geq 1$, on a la borne :
$$1 + t^4 \geq t^4 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq k(t) \leq \frac{1}{t^2} \tag{2}$$
Or $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ (c'est une intégrale de référence). Donc k est intégrable.
5. **Intégrable.** Par parité de l, il suffit de montrer l'intégrabilité sur $[0, \infty[$. On a déjà montré l'intégrabilité sur $[1, \infty[$. Pour tout $t \in [0, 1]$, on a $|l(t)| \leq 1$ et $t \mapsto 1$ est intégrable sur le segment $[0, 1]$ donc l est intégrable sur $[0, 1]$ donc sur $[0, \infty[$ et donc sur $\mathbb{R}$.
6. **Intégrable.** On a déjà montré l'intégrabilité de u sur $[1, \infty[$. Pour tout $t \in]0, 1]$, on a $e^{-t} \leq 1$ et donc
$$0 \leq u(t) \leq \frac{1}{\sqrt{t}}.$$
Comme $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable sur $]0, 1]$ (c'est une intégrale de référence), u est intégrable sur $]0, 1]$. Donc u est intégrable sur $]0, \infty[$

Correction 8. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite de fonctions $f_n :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ donnée par $f_n(t) = \dfrac{n}{\sin^2(n) + nt^2}$. Ces fonctions sont bien mesurables, positives et pour tout $t \in]0, \infty[$ on a que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sin^2(n) + nt^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\frac{\sin^2(n)}{n} + t^2} = \frac{1}{t^2}.$$

Donc, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers la fonction $f : t \mapsto 1/t^2$ sur $]0, +\infty[$. En utilisant le lemme de Fatou on a

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{]0,+\infty[} \frac{n}{\sin^2(n) + nt^2} d\lambda(t) \geq \int_{]0,+\infty[} \liminf_{n\to\infty} \frac{n}{\sin^2(n) + nt^2} d\lambda(t) = \int_{]0,+\infty[} \frac{1}{t^2} d\lambda(t),$$

qui n'est pas intégrable sur $]0, \infty[$ (fonction de référence). Donc, la suite J_n ne converge pas.

Correction 9.

1. **Faux** On peut prendre $f = g : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.
2. **Faux** Un contre-exemple est donné par $f : x \mapsto 1$.

3. **Faux** Un contre-exemple est donné par $f : x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}$.
4. **Faux** Le contre-exemple précédent (prolongé par 0 en l'origine et sur l'intervalle $]1, \infty[$) convient.
5. **Vrai** Supposons, par contraposée, que $f \to \ell \neq 0$ en $+\infty$. En particulier $|f| \to |\ell|$, donc il existe $M \geq 0$ tel que
$$|f(x)| \geq \frac{\ell}{2} \qquad \forall x \geq M.$$
Les constantes non nulles ne sont pas intégrables sur un intervalle non borné $[M, \infty[$, et on a *minoré* $|f|$ par une fonction non intégrable, donc f n'est pas intégrable.

Correction 10. Comme k est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [1, +\infty[$, on ait $|k(x)| \leq M$. Ainsi, pour tout $x \in [1, +\infty[$, on a
$$\left|\frac{k(x)}{1+x^2}\right| \leq \frac{M}{x^2}\,.$$
Or $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$ (c'est une intégrale de référence). Donc $x \mapsto \frac{k(x)}{1+x^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$.

On a par ailleurs, pour tout $x \in [1, +\infty[$, la minoration
$$\left|\frac{1}{k(x)^2}\right| \geq \frac{1}{M^2}\,.$$
Or la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{M^2}$ n'est pas intégrable sur l'intervalle non borné $[1, \infty[$. Donc $x \mapsto \frac{1}{k(x)^2}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Correction 11.

1. La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est mesurable positive donc son intégrale est bien définie à valeurs dans $[0, \infty]$. Pour montrer l'intégrabilité, on montre que cette intégrale est finie. Par parité, on a
$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) = 2\int_{[0,\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x).$$
La fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $[0, \infty[$ (c'est un résultat du cours : il s'agit d'une fonction de référence). Redémontrons néanmoins ce point à partir de l'intégrabilité de la fonction $x \mapsto e^{-x}$ sur $[0, \infty[$. On a, par additivité et croissance de l'intégrale des fonctions positives :
$$\int_{[0,\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) = \int_{[0,1]} e^{-x^2} d\lambda(x) + \int_{]1,\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) \leq \int_{[0,1]} 1 d\lambda(x) + \int_{]1,\infty[} e^{-x} d\lambda(x).$$
Or
$$\int_{[0,1]} 1 d\lambda(x) = 1 < \infty$$
par normalisation de l'intégrale, et
$$\int_{]1,\infty[} e^{-x} d\lambda(x) < \infty$$
(rappelons que $x \mapsto e^{-x}$ est une fonction intégrale de référence sur $[1, \infty[$). Par conséquent
$$\int_{[0,\infty[} e^{-x^2} d\lambda(x) < \infty$$

donc

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x) < \infty$$

et $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Comme la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable, on peut appliquer la propriété d'invariance de l'intégrale par homothétie pour $s = \sqrt{n}$ et on obtient l'égalité souhaitée.

POUR RÉVISER

Correction 12.

1. Vrai. Il s'agit de la contraposée de la proposition 1.41 du cours. Plus précisément, de la contraposée de l'énoncé suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers f. Alors, si la convergence est uniforme, f est continue.
2. Faux. Un contre-exemple est donné par la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $f_n(x) = x/n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue. En outre, (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
   Mais la convergence n'est pas uniforme car $\sup\{|f_n(x) - 0|, x \in \mathbb{R}\} = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Vrai. Il s'agit encore de la contraposée de la proposition 1.41 du cours. Plus précisément, de la contraposée de l'énoncé suivant. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ convergeant uniformément vers f. Alors, si les f_n sont continues pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est continue.
4. • L'implication directe est fausse. Contre-exemple : la suite (x_n) définie par $x_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ qui ne converge pas vers 0 alors qu'il n'existe pas $\epsilon > 0$ tel que $|x_n| \geq \epsilon$ pour tout n, car $|x_0| = 0$.

   Plus intéressant : le résultat n'est toujours pas correct si l'on affirme que la minoration a seulement lieu à partir d'un certain rang, comme le montre le contre-exemple suivant. Contre-exemple : la suite (x_n) définie par $x_n = 1$ si n est pair et $x_n = 0$ si n est impair.

   • La réciproque est vraie car si tous les $|x_n|$ sont minorés par un même réel $\varepsilon > 0$, la suite (x_n) ne converge pas vers 0.
5. Vrai. Dire que (f_n) ne converge pas uniformément vers f revient à dire que la suite $(||f_n - f||_\infty)$ ne converge pas vers 0. Or, par définition de $||f_n - f||_\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \frac{||f_n - f||_\infty}{2}$. Ainsi la suite $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)$ ne converge pas vers 0 (sinon $||f_n - f||_\infty$ convergereait vers 0 par le théorème des gendrames).
6. Vrai. Il s'agit de la contraposée du point précédent.

Correction 13.

1. Faux. Contre exemple : la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = x^n$ sur $[0, 1]$. Cette suite est une suite de fonctions continues qui converge simplement vers f définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0, 1[$ et $f(1) = 1$ (voir feuille de TD 1). La limite simple f n'est pas continue.
2. Faux. Contre exemple : la suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $x = 0$ et $f_n(x) = 0$ sinon. La suite (f_n) est une suite de fonctions discontinues qui converge uniformément vers la fonction f identiquement nulle, qui est continue.
3. Faux. La convergence ne dit rien sur les premiers termes de la suite. Contre-exemple : la suite (f_n) définie par $f_0 = 0$ et $f_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \mathbb{1}_{\{0\}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cette suite converge uniformément vers $\mathbb{1}_{\{0\}}$ car $||f_n - \mathbb{1}_{\{0\}}||_\infty = ||\frac{1}{n}\mathbb{1}_{\{0\}}||_\infty = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_0 est continue. La convergence est uniforme et la limite n'est pas continue. (Remarque : on pourrait montrer que, dans les cas général, les (f_n) sont toutes discontinues à partir d'un certain rang).

4. Faux. Contre exemple : la suite de fonction définie par $f_n = n\mathbb{1}_{\{0\}}$ pour $n \in \mathbb{N}$. C'est bien une suite croissante de fonctions positives mais cette suite converge simplement vers $f : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ définie par $f(0) = +\infty$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$. La limite ne prend donc pas que des valeurs finies.
5. Faux. Contre exemple : la suite de fonction définie par $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$ pour $n \in \mathbb{N}$. C'est une suite de fonctions positives intégrables ($\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par normalisation de l'intégrale) qui converge simplement vers la fonction constante 1 qui n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Correction 14.

1. Faux. Un contre-exemple est donné par $f : x \mapsto 1$.
2. Vrai. L'ensemble des fonctions intégrables sur le corps $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, par linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire.
3. Vrai. Soit $M \geq 0$ tel que $|g(x)| \leq M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|(fg)(x)| = |f(x)||g(x)| \leq M|f(x)|.$$
Par croissance de l'intégrale des fonctions positives, et linéarité de l'intégrale des fonctions intégrables, il vient
$$\int_{\mathbb{R}} |fg| d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} M|f| d\lambda = M \int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda < \infty.$$
Donc fg est intégrable.

Correction 15. Voir cours.

Correction 16.

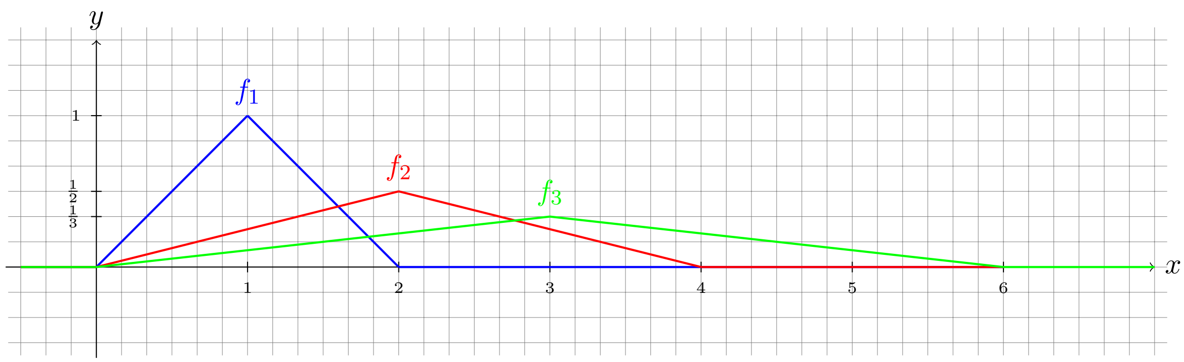
1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [0, 1]$, on a $x^{2n} \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ et par conséquent $f_n(x) \geq 0$ et f_n est positive On a par linéarité de l'intégrale (les deux intégrales de droite sont bien définies car on intègre sur un segment des fonctions continues (et donc bornées et donc intégrables)) :
$$\int_{[0,1]} x^{2n}(1 - x)\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,1]} x^{2n}\mathrm{d}\lambda - \int_{[0,1]} x^{2n+1}\mathrm{d}\lambda = \frac{1}{2n + 1} - \frac{1}{2n + 2}.$$
2. On considère la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$. C'est une série de fonctions (mesurables) positives. On note f la somme de cette série. On a $f : [0, 1] \to [0, \infty]$. Par le théorème de convergence monotone pour les séries la série des intégrales $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} f_n \mathrm{d}\lambda$ converge (dans $[0, +\infty]$) et a pour somme $\int_{[0,1]} f \mathrm{d}\lambda$. Autrement dit
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} x^{2n}(1 - x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} f \mathrm{d}\lambda.$$
Or pour tout $x \in [0, 1[$ on a
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} x^{2n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} (x^2)^n = \frac{1}{1 - x^2}$$
Ainsi, pour tout $x \in [0, 1[$ on a
$$f(x) = \frac{1 - x}{1 - x^2} = \frac{1}{1 + x}.$$
Ainsi
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} x^{2n}(1 - x)\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} f \mathrm{d}\lambda = \int_{]0,1]} f \mathrm{d}\lambda = \int_{]0,1]} \frac{1}{1 + x}\mathrm{d}\lambda(x) = \int_{[0,1]} \frac{1}{1 + x}\mathrm{d}\lambda(x).$$

3. Tout d'abord $x \mapsto \ln(1+x)$ est une primitive de la fonction continue $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ sur le segment $[0,1]$. Par conséquent
$$\int_{[0,1]} \frac{1}{1+x} \mathrm{d}\lambda(x) = \ln(2).$$
En outre, par la première question
$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{[0,1]} x^{2n}(1-x)\mathrm{d}\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} - \sum_{n \text{ pair}} \frac{1}{n} = \sum_{m\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^m}{m+1}.$$

EXERCICES BONUS

Correction 17.

1. On va esquisser les graphes de f_1, f_2 et f_3 :



2. Fixons $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $0 \leq x \leq n$, alors $|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n^2}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Si $n < x \leq 2n$, alors $|f_n(x)| = \left|\frac{2n-x}{n^2}\right| \leq \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Si $x > 2n$ ou $x < 0$, alors $|f_n(x)| = 0 < \frac{1}{n}$. C'est-à-dire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a toujours
$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n}.$$
Cela implique que la suite (f_n) converge uniformement vers la fonction nulle.
3. Soit $n \geq 1$. La fonction f_n est nulle en dehors du segment $[0, 2n]$. On a donc
$$\int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,2n]} f_n \mathrm{d}\lambda$$
Les intégrales de Riemann et de Lebesgue de la fonction continue f_n sur le segment $[0, 2n]$ coïncident. Si on sait calculer l'aire d'un triangle rectangle (la moitié de l'aire du rectangle associé) on obtient immédiatement l'égalité
$$\int_{[0,2n]} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_0^{2n} f_n(x)\mathrm{d}x = 2 \times (\frac{1}{2} \times n \times \frac{1}{n}) = 1.$$
4. Le lemme de Fatou nous dit que si (h_n) est une suite de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction h, et si la suite des intégrales $\int_{\mathbb{R}} h_n \mathrm{d}\lambda$ converge dans $[0, \infty]$, alors la fonction h est mesurable positive et on a l'inégalité
$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} h_n \mathrm{d}\lambda \leq \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n \mathrm{d}\lambda.$$

Dans cet exercice, on voit un exemple d'une suite de fonctions mesurables positives qui converge uniformement vers la fonction nulle pour lequel l'inégalité précédente est stricte,

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to+\infty} f_n \mathrm{d}\lambda = 0 < 1 = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda.$$

Correction 18.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on a que

$$|f_n(x)| = \left| -\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \right| = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Ainsi $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$. Cela nous montre que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle.

2. D'après la linéarité de l'intégrale de Lebesgue on a que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, d\lambda(x) &= \int_{\mathbb{R}} \left(-\frac{1}{n} \mathbb{1}_{[0,n]}(x) \right) d\lambda(x) \\ &= -\frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,n]}(x)\, d\lambda(x). \\ &= -1 \end{aligned}$$

   Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n\, d\lambda = -1 < \int_{\mathbb{R}} f\, d\lambda = 0.$$

   Cela ne contredit pas le Lemme de Fatou car il n'est valable que pour les fonctions positives.

Correction 19. La suite $(\int_{\mathbb{R}} |f_n| d\lambda)$ est à valeurs dans $[0,1]$. Donc, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une extraction ϕ telle que $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_{\phi(n)}| d\lambda\right)$ converge vers $l \in [0,1]$. On applique alors le lemme de Fatou à la suite $(|f_{\phi(n)}|)$. On est bien dans le cadre d'application du théorème car chacune des fonction $|f_{\phi(n)}|$ est mesurable positive, la suite de fonctions $(|f_{\phi(n)}|)$ converge simplement vers $|f|$ et $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_{\phi(n)}| d\lambda\right)$ converge vers l. On obtient

$$\int_{\mathbb{R}} |f| d\lambda \leq l \leq 1 < \infty.$$

Par conséquent f est intégrable.