Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 3 :
Intégrale des fonctions positives (Partie 2)

Exercice 1. (Fonctions de référence). Soit $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^a$ pour $0 < x \leq 1$.

1. Pourquoi l'expression $\int_{]0,1]} f d\lambda$ a-t-elle un sens ?
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer $\int_{[1/n,1]} f d\lambda$. (On fera bien attention au cas $a = -1$.)
3. Montrer que $\int_{]0,1]} f d\lambda$ est finie si et seulement si $a > -1$. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur a pour que f soit intégrable.

Exercice 2. (Intégrale et primitive). Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ une fonction continue positive, et soit $F : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une primitive de f.

Montrer que F admet une limite $\lim_{x \to +\infty} F(x) \in [0, +\infty]$ en $+\infty$, et qu'on a l'égalité $\int_{[a,+\infty[} f(t) d\lambda(t) = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a)$.

Exercice 3. (Calculs d'intégrales de Lebesgue). Dire pourquoi les intégrales suivantes ont un sens et les calculer

1. $\int_{[0,+\infty[} x e^{-x^2} d\lambda(x)$;
2. $\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|} d\lambda(x)$;
3. $\int_{[0,+\infty[} x e^{-x} d\lambda(x)$.

Exercice 4. (Application du théorème de convergence monotone). Pour tout $n \geq 1$, on considère

$$I_n = \int_{[0,+\infty[} \exp\left(-\frac{nx + x^2 + \sin^2(x)}{n}\right) d\lambda(x).$$

Montrer que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite dans $[0, +\infty]$ et la déterminer.

Exercice 5. (Application du théorème de convergence monotone). Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la suite $I_n = \int_{]0,1]} \left(x^a + \frac{e^x}{n}\right)^{-1} d\lambda(x)$. Déterminer pour quelles valeurs de a la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente.

Exercice 6. (Application du théorème de convergence monotone). Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives qui converge simplement vers une fonction positive f. On suppose en plus que $\int_{\mathbb{R}} f_0 \, d\lambda < \infty$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$

Exercice 7. (Intégrabilité). Les fonctions suivantes sont-elles intégrables sur leur domaine de définition ?

1. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$;

2. $g : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ définie par $g(t) = ie^{-t^2}$;
3. $h : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $h(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$;
4. $k : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $k(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$;
5. $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $l(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^4}}$;
6. $u :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $u(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$.

Exercice 8. (Application du lemme de Fatou). La suite (J_n) définie par $J_n = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{n}{\sin^2(n) + nx^2} d\lambda(x)$ admet-elle une limite ? Si oui, la déterminer

Exercice 9. Vrai ou faux (justifier en donnant une preuve ou un contre-exemple) ?

1. Soient $f :]0, 1] \to \mathbb{C}$ et $g :]0, 1] \to \mathbb{C}$ intégrables. Alors fg est intégrable.
2. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue (donc mesurable). Alors f est intégrable.
3. Soit $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors f est bornée.
4. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors f est bornée.
5. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction intégrable de limite ℓ en $+\infty$. Alors $\ell = 0$.

Exercice 10. (Intégrabilité). Soit $k : [1, +\infty[\to \mathbb{R}^*$ une fonction mesurable bornée. Les fonctions $x \mapsto \frac{k(x)}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{k(x)^2}$ sont-elles intégrables sur $[1, +\infty[$?

Exercice 11. (Propriétés d'invariance de l'intégrale).

1. Montrer que la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, que

$$\sqrt{n} \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2} d\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} d\lambda(x).$$

POUR RÉVISER

Exercice 12. (Révisions). Vrai ou faux ? On justifiera la réponse en donnant une preuve ou un contre-exemple.
On considère des fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) et on suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si les f_n sont continues et f est discontinue alors la convergence n'est pas uniforme.
2. Si les f_n sont continues et f est continue alors la convergence est uniforme.
3. Si la convergence est uniforme et f est discontinue alors les f_n ne sont pas toutes continues.
4. Soit (x_n) une suite réelle. La suite (x_n) ne converge pas vers 0 si et seulement s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $|x_n| \geq \epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
5. Si la suite (f_n) ne converge pas uniformement vers f, il existe une suite réelle (x_n) telle que la suite $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)$ ne converge pas vers 0.
6. Si pour toute suite réelle (x_n), la suite $(|f_n(x_n) - f(x_n)|)$ converge vers 0 alors la convergence de (f_n) vers f est uniforme.

Exercice 13. Vrai ou faux ? On justifiera la réponse en donnant une preuve ou un contre-exemple.
On considère des fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ($n \in \mathbb{N}$) et on suppose que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

1. Si les f_n sont continues alors f est aussi continue.
2. Si la convergence est uniforme et que les f_n sont discontinues alors f est discontinue.
3. Si la convergence est uniforme et que f est discontinue alors f_n est discontinue pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives alors elle converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$.
5. Si f_n est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors f est intégrable.

Exercice 14. Vrai ou faux ? On justifiera la réponse en donnant une preuve ou un contre-exemple.

1. Soit $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Alors f est intégrable.
2. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrables. Alors $f - g$ est intégrable.
3. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ bornée. Alors fg est intégrable

Exercice 15. (Fonctions de référence). Démontrer les propositions suivantes.

1. La fonction $x \mapsto x^a$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ si et seulement si $a < -1$.
2. La fonction $x \mapsto \ln(x)$ est intégrable sur $]0, 1]$.
3. La fonction $x \mapsto e^{-ax}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$.
4. La fonction $x \mapsto e^{-ax^b}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $a > 0$ et $b > 0$. (Dans le cas $a > 0$ et $b > 0$, on pourra commencer par montrer que la fonction $x \mapsto x^2 e^{-ax^b}$ est bornée sur $[1, +\infty[$).

Exercice 16. (Théorème de convergence monotone pour les séries). Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^{2n}(1 - x)$ pour $x \in [0, 1]$.

1. Montrer que f_n est positive pour tout $n \in \mathbb{N}$ et calculer $\int_{[0,1]} f_n d\lambda$.
2. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{[0,1]} x^{2n}(1 - x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \frac{d\lambda(x)}{1 + x}.$$
3. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

EXERCICES BONUS

Exercice 17. (Lemme de Fatou). On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{x}{n^2} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ \\ \frac{2n-x}{n^2} & \text{si } n < x \leq 2n \\ \\ 0 & \text{si } x > 2n \text{ et } x < 0 \end{cases}$$

1. Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle.
3. Pour tout $n \geq 1$, calculer l'intégrale de f_n sur $\mathbb{R}$.
4. Rappeler l'énoncé du lemme de Fatou. S'il s'applique à (f_n), commenter le résultat obtenu.

Exercice 18. (Lemme de Fatou). Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ donnée par $f_n : x \mapsto -\frac{1}{n}\mathbb{1}_{[0,n]}(x)$.

1. Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f = 0$.
2. Montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda < \int_{\mathbb{R}} f \, d\lambda.$$
Est-ce que cela contredit le Lemme de Fatou ?

Exercice 19. (Lemme de Fatou). Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables (où $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) convergeant simplement vers une fonction mesurable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} |f_n| \leq 1$. Montrer que f est intégrable. (On pourra commencer par montrer qu'il existe une extraction ϕ telle que la suite $\left(\int_{\mathbb{R}} |f_{\phi(n)}| d\lambda\right)$ converge dans $[0, \infty[$.)

Exercice 20. Pour tout $n \geq 1$, on définit $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$g_n(x) = \frac{1}{(1+x)^{1+\frac{1}{n}}}.$$

1. Esquisser le graphe de quelques éléments de la suite.
2. Montrer que le suite de fonctions (g_n) est croissante.
3. Montrer que la suite (g_n) converge simplement vers une fonction g que l'on déterminera.
4. Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il ?
5. Pour tout $n \geq 1$, calculer $\int_{[0,\infty[} g_n d\lambda$.
6. Déterminer $\int_{[0,\infty[} g d\lambda$.