TD II – Dérivées partielles et extrema

1 Dérivées partielles

Exercice 1.1 (Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ ★)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction qui admet des dérivées partielles par rapport à toutes les coordonnées. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si l'application

$$x \mapsto J_f(x)$$

est continue de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 1.2 (Applications linéaires ★)**.** Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ une application linéaire.

1. Montrer que f admet des dérivées partielles et les calculer.
2. En déduire la différentielle de f en tout point.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.3 (Applications bilinéaires ★)**.** Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.

1. Justifier que B est continue.
2. Sans calculer de dérivées partielles, donner un développement limité au premier ordre de B.
3. Conclure que B est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.4 (Avec un produit scalaire ★)**.** Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'application $F : U \to \mathbb{R}$ définie par

$$F(x) = \langle f(x), x\rangle.$$

Calculer ses dérivées partielles et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 1.5 (Identité d'Euler)**.** Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite *homogène de degré* r si pour tout $t > 0$,

$$f(tx) = t^r f(x).$$

1. Montrer que si f est homogène de degré r et admet des dérivées partielles, alors elle vérifie *l'identité d'Euler*
$$\langle \nabla f(x), x\rangle = r f(x).$$
2. Réciproquement, on suppose que f admet des dérivées partielles et satisfait l'identité d'Euler.

(a) Pour $x \in \mathbb{R}^n$ fixé, on pose
$$F(t) = f(tx) - t^r f(x).$$
Montrer que
$$F'(t) = \frac{r}{t} F(t).$$

(b) Calculer $F(1)$.

(c) Conclure que f est homogène de degré r.

3. Soit f une fonction homogène de degré r et admettant des dérivées partielles. Montrer que ces dernières sont homogènes de degré $r - 1$.

2 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Exercice 2.1 (Équation des ondes ★)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.

1. Montrer que les fonctions
$$F_1 : (x,t) \mapsto f(x - ct) \quad \& \quad F_2 : (x,t) \mapsto f(x + ct)$$
sont solutions de l'*Équation des ondes*
$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}. \tag{1}$$

2. Soit maintenant $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'Équation (1).

(a) On définit une fonction $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par
$$\phi(X,Y) = \left(\frac{X+Y}{2}, \frac{Y-X}{2c} \right)$$
et on pose $\widetilde{F} = F \circ \phi$. Montrer que
$$\frac{\partial^2 \widetilde{F}}{\partial X \partial Y} = 0.$$

(b) En déduire qu'il existe des fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que
$$F(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct).$$

Exercice 2.2 (Équation de la chaleur)**.** Pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, on pose
$$f(x,t) = \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-s^2} \mathrm{d}s.$$

1. Montrer que f est solution de l'*Équation de la chaleur*
$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t).$$

2. Montrer que toute solution non nulle n'est pas de cette forme. On pourra en chercher une *à variables séparées*, c'est-à-dire de la forme $f(x,t) = g_1(x) g_2(t)$.

Exercice 2.3 (Inversion de matrices – le retour)**.** On considère l'application $M \mapsto \det(M)$ sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer ses dérivées partielles au point I_n et donner sa différentielle.
3. En déduire sa différentielle au point A pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ (on utilisera la *comatrice* de A).
4. Comment en déduire sa différentielle en tout point ?

On considère maintenant l'application $M \mapsto M^{-1}$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

5. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
6. En reprenant la méthode précédente, calculer sa différentielle en tout point.

Exercice 2.4 (PUISSANCE ★)**.** Pour un entier k, on considère l'application $M \mapsto M^k$.

1. Justifier que cette application est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Calculer sa différentielle en tout point.
3. Si $k = 2$, calculer sa différentielle seconde. Que vaut sa différentielle troisième ?

Exercice 2.5 (FONCTION DE PRODUCTION DE COBB-DOUGLAS ★)**.** On considère la fonction de production de Cobb-Douglas générale $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(K, L) = \lambda K^\alpha L^{1-\alpha}$$

pour un $0 < \alpha < 1$ fixé.

1. Calculer les dérivées partielles secondes de f et vérifier que le THÉORÈME DE SCHWARZ s'applique.
2. Quel est le signe de la productivité marginale du Capital $\partial f / \partial K$? Quelle interprétation en donner ?
3. Quel est le signe de la dérivée de la productivité marginale du Capital par rapport au Capital, c'est-à-dire de $\dfrac{\partial^2 f}{\partial K^2}$? Qu'en conclure ?
4. Même question avec $\dfrac{\partial^2 f}{\partial L \partial K}$.

Exercice 2.6 (DIFFÉRENTIELLE SECONDE)**.** On suppose donnés $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}^m$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $h \in \mathbb{R}^n$, on considère l'application $g : U \to \mathbb{R}^m$ définie par

$$g(x) = D_x f(h).$$

1. Calculer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.
2. En déduire le lien entre $D_x g$ et $D_x^2 f$.
3. On considère maintenant l'application $F : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ définie par

   $$F(x) = D_x f.$$

   Exprimer, pour $x \in U$, $D_x F$ en fonction de $D_x^2 f$.

Exercice 2.7 (DIFFÉRENTIELLE SECONDE D'UNE COMPOSÉE)**.** Soit $f : U \to \mathbb{R}^m$ et $g : V \to \mathbb{R}^p$ où V est un ouvert de $\mathbb{R}^m$ tel que $f(U) \subset V$. On suppose f et g de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $x \in U$, donner une expression de $D_x^2(g \circ f)$ en fonction de $D_x f$, $D_x^2 f$, $D_{f(x)} g$ et $D_{f(x)}^2 g$.

3 Extrema

Exercice 3.1 (Échauffement ★)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1.$$

1. Calculer le gradient de f et en déduire ses points critiques.

2. En utilisant une identité remarquable, déterminer la nature des points critiques.

On considère maintenant la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x, y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2.$$

4. Calculer le gradient de g et en déduire ses points critiques.

5. En étudiant la restriction de g à deux droites bien choisies, déterminer la nature des points critiques.

Exercice 3.2 (Condition d'ordre deux ★)**.** Étudier les extrema locaux et globaux des fonctions :

1. $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$;

2. $g(x, y) = y(x^2 + \ln(y)^2)$ (on sera attentif à l'ensemble de définition) ;

3. $h(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

Exercice 3.3 (The World Company ★)**.** Une entreprise cherche à maximiser son profit en produisant un bien. Si on note p le prix unitaire du bien, alors le profit est donné en fonction du travail L et du capital K par la formule

$$\pi(L, K) = pf(L, K) - \alpha L - \beta K,$$

où f est la fonction de production de l'entreprise et α et β sont des paramètres définissant la stratégie de l'entreprise.

1. On suppose qu'il existe un couple $(\widetilde{L}, \widetilde{K})$ pour lequel π est globalement maximale. Exprimer

$$\frac{\partial f}{\partial L}(\widetilde{L}, \widetilde{K})$$

en fonction de α.

2. On cherche maintenant à savoir l'effet de α sur la quantité de travail optimale $\widetilde{L}$. On considère donc cette dernière comme une fonction de α. Montrer qu'on a alors

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial L^2}(\widetilde{L}, \widetilde{K})\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial \alpha}(\alpha) = 1.$$

3. Si les dérivées partielles de f ont le même signe que celles de la fonction de Cobb-Douglas, montrer que $\widetilde{L}$ diminue quand α augmente. Sachant que α représente le salaire par unité de travail, ce résultat vous semble-t-il cohérent ?

Exercice 3.4 (Un peu de réflexion)**.** On considère un rayon lumineux partant d'un point P_1 de coordonnées $(0, 0, z_1)$ et se réfléchissant sur un miroir formant le plan $\mathcal{P}$ d'équation $z = 0$ en un point Q de coordonnées $(x, y, 0)$. Il atteint ensuite un point P_2 de coordonnées $(x_2, 0, z_2)$ avec $z_2 > 0$.

1. Exprimer, en fonction de x et y, le temps de trajet du rayon lumineux entre P_1 et P_2.

2. On cherche le point Q pour lequel ce temps est minimal. Montrer que les points P_1, P_2 et Q appartiennent au plan d'équation $y = 0$.

3. Conclure, à l'aide d'un dessin, que le point Q est déterminé par la relation

$$\sin(\theta_1) = \sin(\theta_2),$$

où θ_i est l'angle formé par l'axe Qx et la droite (QP_i).

Exercice 3.5 (Une inégalité isopérimétrique). Le but de cet exercice est de trouver, parmi tous les triangles de périmètre 2, ceux qui ont une aire maximale. On utilisera pour cela la Formule de Héron[1] : pour un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b et c, l'aire est égale à

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où p est le demi-périmètre.

1. Quelle est la valeur de p si le triangle est de périmètre 2 ? En déduire une expression de A en fonction des longueurs a et b des deux premiers côtés.

2. Quel est le domaine de définition de la fonction $(a, b) \mapsto A(a, b)$?

3. On considère maintenant la fonction $f :]0; 1[\times]0; 1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (1 - x)(1 - y)(x + y - 1).$$

(a) Déterminer les points critiques de f. Quel candidat ceci fournit-il pour un maximum ?

(b) On veut maintenant vérifier que nous avons trouvé un maximum global de f. Pour $y \in]0; 1[$ fixé, on pose $f_y : x \mapsto f(x, y)$. Déterminer le maximum de f sur $]0; 1[$. On note $M(y)$ cette valeur.

(c) Déterminer le maximum de $M(y)$ pour $y \in]0; 1[$ et conclure.

4. Finalement, quel est le triangle de périmètre 2 ayant la plus grande aire ?

Exercice 3.6 (Méthode de Héron). Héron d'Alexandrie avait développé une méthode pour calculer les décimales du nombre irrationnel $\sqrt{2}$. Cette méthode consiste à calculer par récurrence les termes de la suite définie par $x_0 = 2$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right).$$

1. Relier cette méthode à la Méthode de Newton.

2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant x_n \leqslant 2$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|x_{n+1} - \sqrt{2}| \leqslant \frac{(x_n - \sqrt{2})^2}{2}$$

4. En déduire une estimation de $|x_n - \sqrt{2}|$ en fonction de n, puis la convergence de la suite.

[1] Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère) : Mathématicien et ingénieur grec dont on ignore presque tout. Outre des résultats mathématiques qui portent aujourd'hui son nom (voir aussi l'exercice suivant), il a imaginé de nombreuses machines pneumatiques ou hydrauliques.