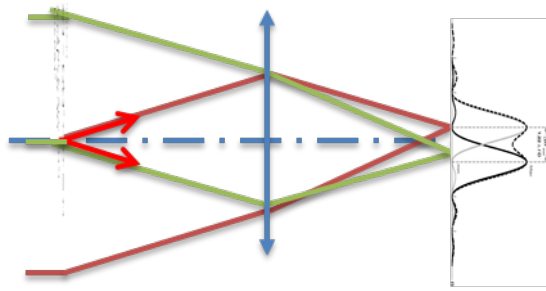


Soit le montage suivant :



Un objet diffractant, de fonction de phase  $T(x, y) = P(x, y) \cdot e^{ikn\Delta(x, y)}$  est positionné au plan focal objet d'une lentille de Fourier de focale  $f$ , avec  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ .

1. On suppose que  $n\Delta(x, y) = A \cdot \sin(2\pi\mu x)$  avec  $T=1/\mu$  petit devant le diamètre de la pupille. Calculer l'expression exacte de la distribution d'intensité  $I(x', y')$  dans le plan focal. On utilisera pour cela les fonctions de Bessel définies par :

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ix \cdot \sin u} \cdot e^{-inu} du = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (n+p)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}$$

2. Dans l'hypothèse où  $kn\Delta \ll 1$ , calculer l'expression approchée de  $I$ . Vérifier que l'on retrouve bien l'expression trouvée dans le cours.

Corrigé :

$n\Delta$  est périodique de période  $T=1/\mu$ , donc  $e^{ikn\Delta}$  l'est aussi. Cette fonction peut donc se décomposer en série de Fourier. On a donc :

$$e^{ikn\Delta} = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j e^{2i\pi\mu jx}$$

$$TF(e^{ikn\Delta})(u) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_j \delta(u - jn)$$

Avec  $c_j = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{ikn\Delta} e^{-\frac{2i\pi}{T}jx} dx = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{iAk \sin(2\pi\mu x)} e^{-2i\pi\mu jx} dx$ . En faisant le changement de variable  $u = 2\pi\mu x$ , on trouve que  $c_j = J_j(Ak)$  et  $c_{-j} = J_j(-Ak)$

L'amplitude du champ dans le plan focal vaut donc (à un coef multiplicateur près) :

$$E(x', y') \sim TF(P \cdot e^{ikn\Delta})\left(\frac{x'}{\lambda_f}, \frac{y'}{\lambda_f}\right) = \left( \tilde{P} * \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(Ak) \delta(u - \mu n) \right) \left(\frac{x'}{\lambda_f}, \frac{y'}{\lambda_f}\right)$$

$$E(x', y') \sim \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(Ak) \tilde{P}\left(\frac{x'}{\lambda_f} - \mu n, \frac{y'}{\lambda_f}\right)$$

L'intensité vaut alors :

$$I(x', y') = |E|^2 \sim \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(Ak) \tilde{P}\left(\frac{x'}{\lambda_f} - \mu n, \frac{y'}{\lambda_f}\right) \cdot \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(Ak)^* \tilde{P}^*\left(\frac{x'}{\lambda_f} - \mu n, \frac{y'}{\lambda_f}\right)$$

Comme  $1/\mu$  est petit devant le diamètre de la pupille D, on peut négliger les termes croisés car  $\tilde{P}$  devient nul pour des fréquences  $\mu$  grandes devant  $1/D$  et l'on trouve :

$$I(x', y') \sim \sum_{-\infty}^{\infty} |J_n(Ak)|^2 |\tilde{P}|^2 \left(\frac{x'}{\lambda_f} - \mu n, \frac{y'}{\lambda_f}\right)$$

Par ailleurs,  $J_n(Ak) = \left(\frac{Ak}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{Ak}{2}\right)^{2p}$ . Quand A.k est petit, on peut négliger les puissances de  $\left(\frac{Ak}{2}\right)$  d'ordre  $>2$  et l'on trouve :

$$|J_0(Ak)|^2 \approx 1 - \frac{(Ak)^2}{2}$$

$$|J_1(Ak)|^2 \approx \frac{(Ak)^2}{4}$$

$$|J_{-1}(Ak)|^2 \approx \frac{(Ak)^2}{4}$$

$$|J_n(Ak)|^2 \approx 0 \text{ pour } n \geq 2$$

En final, on a :

$$I(x', y') \sim \left(1 - \frac{(Ak)^2}{2}\right) \cdot |\bar{P}|^2 \left(\frac{x'}{\lambda f}, \frac{y'}{\lambda f}\right) + \frac{(Ak)^2}{4} |\bar{P}|^2 \left(\frac{x'}{\lambda f} - \mu, \frac{y'}{\lambda f}\right) + \frac{(Ak)^2}{4} |\bar{P}|^2 \left(\frac{x'}{\lambda f} + \mu, \frac{y'}{\lambda f}\right)$$

Une partie de l'énergie est diffractée aux ordres -1 et 1, aux positions  $x' = f \cdot \frac{\lambda}{T}$  et  $x' = -f \cdot \frac{\lambda}{T}$ , ce qui est attendu par la loi des réseaux. L'amplitude de l'énergie diffractée dans chaque ordre vaut  $\frac{(Ak)^2}{4}$ . L'énergie diffractée dans les autres ordres est négligeable. On retrouve bien le résultat qu'on avait obtenu dans le cours avec un développement limité (calcul fait pour  $\Delta = A \cos(2\pi\mu x)$  mais qui donne le même résultat avec un sinus).