Partiel du 21/10/22 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints, rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

On rappelle que les fonctions $x \in [0,+\infty[\to e^{-x} \in [0,+\infty[$ et $x \in]0,1] \to x^a \in [0,+\infty[$ (pour $a \in \mathbb{R}$) figurent parmi les "fonctions de référence" du cours. Vous pouvez donc utiliser leurs propriétés d'intégrabilité ou de non-intégrabilité sans les re-démontrer : il vous suffit de citer clairement le résultat lorsque vous l'utilisez.

Question de cours.

Soient $]a,b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $f :]a,b[\to [0,+\infty]$ une fonction mesurable positive. Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels avec $a < a_n < b_n < b$. On suppose que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît vers a et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît vers b. Démontrer l'égalité

$$\int_{]a,b[} f\, d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f\, d\lambda\,.$$

Exercice 1 :

1. Rappeler la définition d'une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable.
2. On introduit la fonction définie par
$$F : x \in]0,+\infty[\mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \in [0,+\infty]\,.$$
   (a) La fonction F est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$?
   (b) La fonction F est-elle intégrable sur $]0,1]$?
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie pour $n \geq 1$ et $x \geq 0$ par
$$f_n : x \in [0,+\infty[\mapsto \frac{ne^{-x}}{\sqrt{1+n^2x}} \in [0,+\infty[\,.$$
   (a) Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ et expliciter sa limite $\lim_{n\to\infty} f_n : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$.
   (b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales $I_n = \int_{[0,+\infty[} f_n\, d\lambda$ de ces fonctions converge vers $I \in [0,+\infty]$, puis que $I < +\infty$.
   On ne demande pas de déterminer explicitement la valeur de I.

T.S.V.P.

Exercice 2 :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit la fonction $g_n : [0,+\infty[\to [0,+\infty[$ définie pour $x \in [0,+\infty[$ par

$$g_n(x) = \frac{ne^{-nx}}{\sqrt{1+n^2x^2}}\,.$$

Attention : ce n'est pas la même fonction que dans l'exercice 1 !

1. Démontrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction $g : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$ que l'on explicitera.
2. Déterminer la valeur de $\int_{[0,+\infty[} g\, d\lambda$.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'intégrale

$$J_n = \int_{]0,+\infty[} g_n\, d\lambda\,.$$

   (a) Pour $n \geq 2$, utiliser les propriétés d'invariance de l'intégrale de Lebesgue pour exprimer J_n en fonction de J_1.

   (b) La suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, quelle est sa limite ?

Exercice 3 :

On rappelle que $\ln(x)$ désigne le logarithme d'un réel positif $x > 0$.
On rappelle également, pour tout $u \in]-1,1[$, l'égalité

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{\infty} u^n\,.$$

1. (a) Justifier le fait que chaque intégrale

$$K_n = \int_{[1,+\infty[} x^{-n}\ln(x)\, d\lambda(x)$$

   (pour $n \in \mathbb{N}$) a un sens.

   (b) i. Déterminer la valeur de K_0.

   ii. Déterminer la valeur de K_1.

   iii. Soit $n \geq 2$. Exprimer, en fonction de n, la valeur de K_n. On justifiera très soigneusement toutes les étapes du raisonnement.
   Indication : On trouvera notamment $K_2 = 1$.
2. Montrer alors l'égalité

$$\int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, d\lambda(x) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{2n+2}\,.$$

   On remarquera que $1/x^2 < 1$ lorsque $x > 1$.
3. On rappelle que $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.
   Déterminer alors la valeur numérique de $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, d\lambda(x)$.