Examen 3 janvier 2023 – Durée 2 heures

Documents (y compris électroniques) interdits.
Calculatrices, objects connectés et téléphones éteints, rangés dans des sacs fermés.

Soigner la rédaction. Enoncer précisément les théorèmes utilisés, et vérifier soigneusement que les hypothèses sont satisfaites.
On peut admettre le résultat d'une question et passer à la suivante.

Exercice 1 : On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, d\lambda(x) = \sqrt{\pi}$.

1. Justifier le fait que l'expression $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{-nx^2}}{\sqrt{n}}$ définit une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer, en fonction de n, la valeur de l'intégrale $I_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-nx^2}\, d\lambda(x)$.
3. La fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 :

Soit $f : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ une fonction (mesurable).

On introduit la fonction $h :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x, t) = \dfrac{f(t)}{1 + xt^2}$.

1. Soit $x > 0$. La fonction $u_x : t \mapsto \dfrac{1}{1 + xt^2}$ est-elle intégrable sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que l'expression
$$F : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{1 + xt^2}\, d\lambda(t)$$
définit une fonction continue $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.
3. (a) Montrer, pour tout $x \geq 1$ et tout $t \in \mathbb{R}$, la majoration $\dfrac{t^2}{(1 + xt^2)^2} \leq \dfrac{1}{1 + t^2}$.
   (b) Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

Exercice 3 :

1. (a) En justifiant soigneusement toutes les étapes du calcul, montrer l'égalité

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+x^2}\, d\lambda(x) = \frac{\pi}{2}\,.$$

   (b) Soit $y > 0$. Déterminer alors, en fonction de y, la valeur de $I(y) = \displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{1}{1+y\,x^2}\, d\lambda(x)$.

   (c) Montrer également l'égalité $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} \frac{1}{2\sqrt{t}}\frac{1}{1+t}\, d\lambda(t) = \frac{\pi}{2}$.

   On pourra utiliser un changement de variable.

2. En utilisant les résultats de la question 1, montrer l'égalité $K = \dfrac{\pi^2}{2}$ où

$$K = \int_{[0,+\infty[\times[0,+\infty[} \frac{1}{(1+y\,x^2)(1+y)}\, d\lambda(x,y)\,.$$

Notre objectif est maintenant de déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{[0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, d\lambda(x)$.
On observera que l'intégrand est bien défini, sauf lorsque $x = 0$ *ou* $x = 1$*, c'est-à-dire presque partout sur* $[0,+\infty[$.

3. Pour $x \in [0,+\infty[$, on pose $h_n(x) = \displaystyle\int_{[0,n]} \frac{1}{(1+y)(1+y\,x^2)}\, d\lambda(y)$.

   (a) Montrer que $h_n(x)$ est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,+\infty[$.

   (b) Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,+\infty[$ vers une fonction $h : [0,+\infty[\to [0,+\infty]$, que l'on exprimera à l'aide d'une intégrale.

   (c) Exprimer alors l'intégrale $J = \int_{[0,+\infty[} h(x)\, d\lambda(x)$ à l'aide des intégrales $J_n = \int_{[0,+\infty[} h_n(x)\, d\lambda(x)$.

4. (a) Soient $y > 0$ et $x \in [0,+\infty[$ avec $x \neq 1$. Montrer l'identité

$$\frac{1}{(1+y)(1+y\,x^2)} = \frac{1}{x^2-1}\left(\frac{x^2}{1+y\,x^2} - \frac{1}{1+y}\right).$$

   (b) Soit $x \in [0,+\infty[$ avec $x \neq 1$. Montrer l'égalité $h_n(x) = \frac{1}{x^2-1}\ln\left(\frac{1+nx^2}{1+n}\right)$.

   (c) En déduire la valeur de $h(x)$ pour tout $x \in [0,+\infty[$ avec $x \neq 1$.

5. Déterminer enfin la valeur de l'intégrale

$$\int_{[0,+\infty[} \frac{\ln(x)}{x^2-1}\, d\lambda(x)\,.$$

   On commencera par expliquer pourquoi cette intégrale a un sens.