Feuille 2 Exercice 4

Soit $a>0$

Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ dans les cas suivants :

a) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$

$x \longrightarrow \dfrac{1}{n^3+x^2}$

On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^3}$ donc

$\|f_n\|_{\mathbb{R}} = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} f_n(x) \leq \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \geq 1$

Comme $0 \leq \|f_n\|_{\mathbb{R}} \leq \dfrac{1}{n^3}$, $\forall n \geq 1$

et la série $\sum \dfrac{1}{n^3}$ cv, alors $\sum \|f_n\|_{\mathbb{R}}$ cv.

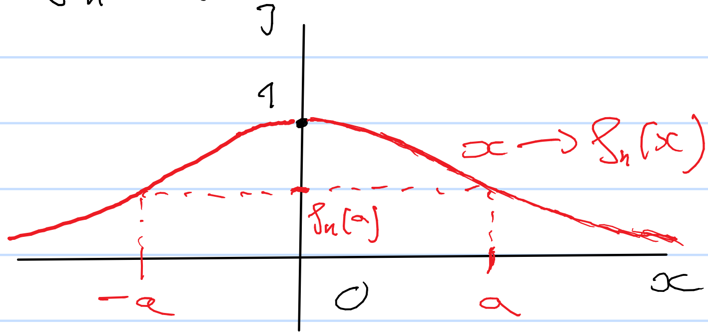
Cas b) et c) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longrightarrow e^{-n^2x^2}$, $n \geq 0$

- Si $n \geq 1$, la fonction f_n est paire, positive, strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et ses limites en $\pm\infty$ sont nulles

(On peut dresser le tableau de variations de f_n

$f_n'(x) = \exp(-n^2x^2)\cdot(-2n^2x)$ ...)



- Sur l'intervalle $[-a,a]$

$\|f_n\|_{[-a,a]} =$

$= \sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| =$

$= \sup\limits_{x\in[-a,a]} f_n(x) = 1 \ (= f_n(0))$

$\|f_n\|_{[-a,a]} = 1$ et $\sum \|f_n\|_{[-a,a]}$ diverge.
(c'est le cas d))

- Etudions maintenant (cas c)) la convergence normale de la série $\sum f_n$ sur le domaine : $\boxed{D =]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[}$. A partir du graphe de f_n on a $\|f_n\|_D \underset{\text{parité}}{=} \|f_n\|_{[a,+\infty[}$

$$= \sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x)| \underset{f_n>0}{=} \sup_{x\in[a,+\infty[} f_n(x) \underset{\substack{f_n \text{ strictement} \\ \text{décroissante sur } [0,+\infty[}}{=} f_n(a) = e^{-n^2a^2}$$

Nous devons étudier la nature de la série numérique $\sum e^{-n^2a^2}$

Remarquons que $n^2a^2 \geq na^2$ donc $-n^2a^2 \leq -na^2$ et

$$e^{-n^2a^2} \leq e^{-na^2} = \left(e^{-a^2}\right)^n = \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^n.$$

Finalement :

$$0 \leq e^{-n^2a^2} \leq \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^n \quad \forall n \geq 1$$

Or la série $\sum \left(\frac{1}{e^{a^2}}\right)^n$ CV (série géométrique $\sum z^n$ avec $|z|<1$ ici $0 < z = \frac{1}{e^{a^2}} < 1$ car $a > 0 \Rightarrow e^{a^2} > 1$)

Donc $\sum e^{-n^2a^2}$ converge (critère de comparaison)

et $\sum f_n$ CV normalement sur $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$

b) $f_n : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ $(a > 0 \text{ fixé})$

$$x \longmapsto \exp(-(x-n)^2)$$

Nous allons étudier la cv normale de la série $\sum f_n$ sur $[-a,a]$

On peut dresser facilement le tableau de variations de f_n $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \exp(-(x-n)^2)$

$$\Big(f'_n(x) = \exp(-(x-n)^2) \cdot (-2(x-n)) = \exp(-(x-n)^2)\,(2(n-x)) \dots \Big)$$

On a :

x	$-\infty$		n		$+\infty$
f'_n		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Remarquons que si $\boxed{n \geq a}$ la fonction f_n est croissante (et positive) sur $[-a,a]$

donc $$\|f_n\|_{[-a,a]} = \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[-a,a]} f_n(x) = f_n(a)$$

Si, de plus, $\boxed{n \geq 2a}$ on a

$$(a-n)^2 = (n-a)^2 \geq \frac{n^2}{4} \geq \frac{n}{4}$$

$n \geq 2a \Rightarrow a \leq \frac{n}{2} \Rightarrow -a \geq -\frac{n}{2}$

donc $n-a \geq n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} > 0$

et $(n-a)^2 \geq \frac{n^2}{4}$

Ainsi

$$-(a-n)^2 \leq -\frac{n}{4} \quad \text{et}$$

$$0 \leq \underbrace{\exp\left(-(a-n)^2\right)}_{f_n(a) = \|f_n\|_{[-a,a]}} \leq e^{-n/4} = \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^n$$

Récapitulons : $\forall\, n \geq 2a$ on a

$$0 \leq \|f_n\|_{[-a,a]} \leq \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^n$$

Or, la série numérique $\sum \left(e^{-\frac{1}{4}}\right)^n$ converge (série géométrique $\sum z^n$ avec $0 < z = e^{-\frac{1}{4}} < 1$)

Donc $\sum\limits_{n \geq 2a} \|f_n\|_{[-a,a]}$ converge.

et $\sum\limits_{n \geq 0} \|f_n\|_{[-a,a]}$ aussi.