Évaluation du lundi 7 Octobre

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)

Exercice 1 ().
On considère dans cet exercice l'application *transposée*, notée T, telle que pour toute matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a

$$T\Big(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

On pourra aussi le noter de la manière suivante : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$.

1. Quels sont les espaces vectoriels de départ et d'arrivée de T ?
2. Démontrer que T est une application linéaire.
3. On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{S} = \big\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid T(M) = M\big\}$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{S}$ est un espace vectoriel.
   (b) Démontrer que $\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\Big)$ est une famille génératrice de $\mathcal{S}$
   (c) Démontrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2}\big(P + T(P)\big) \in \mathcal{S}$$

4. On considère l'ensemble suivant :

$$\mathcal{A} = \big\{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid T(M) = -M\big\}$$

   (a) Démontrer que $\mathcal{A}$ est un espace vectoriel.
   (b) Déterminer une famille génératrice de $\mathcal{A}$
   (c) Démontrer que pour toute matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$:

$$\frac{1}{2}\big(P - T(P)\big) \in \mathcal{A}$$

5. Démontrer que si $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$, alors M est la matrice nulle.
6. Démontrer que

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$$

Correction

1. *L'application T transforme une matrice carrée de taille 2 en une autre matrice carrée de taille 2, donc les espaces de départ et d'arrivée sont les mêmes, $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.*
2. *Posons $M_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Posons $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Montrons que $T(\lambda M_1 + M_2) = \lambda T(M_1) + T(M_2)$. On a :

$$\begin{aligned}
T(\lambda M_1 + M_2) &= T\Big(\lambda \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}\Big) \\
&= T\Big(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda c_1 + c_2 & \lambda d_1 + d_2 \end{pmatrix} \Big) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda a_1 + a_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & \lambda d_1 + d_2 \end{pmatrix} && \textit{par définition de } T \\
&= \lambda \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_2 & c_2 \\ b_2 & d_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda T(M_1) + T(M_2) && \textit{de nouveau par définition de } T
\end{aligned}$$

Ainsi, T est bien une application linéaire.

3. (a) *D'une part, $\mathcal{S} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui est un espace vectoriel.*
D'autre part,

$$T\Big(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Big) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ et donc $\mathcal{S}$ est non vide.

Enfin, montrons que $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire. Posons $M_1, M_2 \in \mathcal{S}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et démontrons que $\lambda M_1 + M_2 \in \mathcal{S}$. Autrement dit, il s'agit de démontrer que

$$T\Big(\lambda M_1 + M_2\Big) = \lambda M_1 + M_2$$

Or,

$$\begin{aligned}
T\Big(\lambda M_1 + M_2\Big) &= \lambda T(M_1) + T(M_2) && \textit{par linéarité de } T \\
&= \lambda M_1 + M_2 && \textit{car } M_1 \in \mathcal{S} \textit{ et } M_2 \in \mathcal{S}
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}$ est stable par combinaison linéaire et est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, donc un espace vectoriel.

(b) *Il s'agit de démontrer que*

$$S = \mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big)$$

D'une part, chacune des trois matrices est bien dans $\mathcal{S}$ car elles sont égales à leurs transposées. Puis $\mathcal{S}$ étant stable par combinaison linéaire, on a :

$$\mathrm{Vect}\Big(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Big) \subset \mathcal{S}$$

Montrons l'inclusion réciproque. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$*. La condition* $T(M) = M$ *impose* $b = c$ *et donc :*

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, $\mathcal{S} \subset \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$ *et donc par double inclusion on a l'égalité voulue, c'est-à-dire que ces trois matrices forment bien une famille génératrice de* $\mathcal{S}$*.*

(c) *Soit* $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. On a :*

$$\begin{aligned} T\Big(\frac{1}{2}\big(P + T(P)\big)\Big) &= \frac{1}{2}\big(T(P) + T(T(P))\big) && \text{par linéarité de } T \\ &= \frac{1}{2}\big(T(P) + P\big) && \text{car } T(T(P)) = P \\ &= \frac{1}{2}\big(P + T(P)\big) \end{aligned}$$

Ce qui est exactement la condition pour que $\frac{1}{2}\big(P + T(P)\big) \in \mathcal{S}$*.*

4. *Correction non rédigée, procéder de même que pour la question précédente, c'est un bon entraînement !*
5. *Soit* $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{A}$*. On a alors d'une part* $T(M) = M$ *puisque* $M \in \mathcal{S}$*, et d'autre part* $T(M) = -M$ *puisque* $M \in \mathcal{A}$*.*
   Ainsi, $M = -M$*, donc* $2M = 0$ *et donc* $M = 0$*.*
6. *Démontrons par double inclusion que*

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$$

D'une part si $P \in \mathcal{S} + \mathcal{A}$ *alors* P *est la somme de deux matrices carrées de taille 2 et reste donc une matrice carrée de taille 2. Ainsi :*

$$\mathcal{S} + \mathcal{A} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$$

D'autre part, si $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *on a subtilement :*

$$P = \underbrace{\frac{1}{2}\big(P + T(P)\big)}_{\in \mathcal{S}} + \underbrace{\frac{1}{2}\big(P - T(P)\big)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{S} + \mathcal{A}$$

Ainsi $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{S} + \mathcal{A}$ *et on obtient le résultat voulu par double inclusion.*

Exercice 2 ().
On considère les applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -x+y+2z \\ -2x+2y+4z \\ x-y-2z \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} -2x+4y+5z \\ -3x+7y+9z \\ -y-z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Déterminer les matrices de f et g. On les notera respectivement M_f et M_g.
2. Démontrer que
$$M_f M_g = M_g M_f$$
3. En calculant le noyau de f, déterminer $v_1 \in \mathbb{R}^3$ et $v_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que
$$\ker(f) = \text{Vect}(v_1, v_2)$$
4. Démontrer que
$$g(v_1) \in \ker(f) \qquad \text{et} \qquad g(v_2) \in \ker(f)$$
5. En déduire que
$$\text{Vect}\left(g(v_1), g(v_2)\right) \subset \ker(f)$$

Correction

1. *On a, en identifiant les images comme produit d'une matrice par le vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *:*
$$M_f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad M_g = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 5 \\ -3 & 7 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$
2. *On prend son courage à deux mains et on y va. Par exemple le calcul de la première colonne du produit* $M_f M_g$ *est :*
$$-2\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
On fait de même pour les autres colonnes et on obtient $M_f M_g = M_f$*, et de même* $M_g M_f = M_f$*, d'ou l'égalité* $M_f M_g = M_g M_f$.
3. *On a* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \ker f$ *si et seulement si* $M_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$*, ce qui revient à résoudre le système linéaire suivant :*
$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \\ -2x + 2y + 4z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$
En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ *et* $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$*, on obtient :*
$$\begin{cases} -x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

d'où l'on tire que y et z sont des paramètres et $x = y + 2z$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\ker f = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \qquad \textit{avec} \qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4. *Il s'agit de démontrer que $f(g(v_1)) = 0$ et $f(g(v_2)) = 0$. Or,*

$$\begin{aligned} f(g(v_1)) &= M_f M_g v_1 \\ &= M_g M_f v_1 && \textit{d'après la question 2)} \\ &= M_g 0 && \textit{puisque } v_1 \in \ker f \\ &= 0 \end{aligned}$$

   On procède de même pour le calcul de $f(g(v_2))$ et on en conclut que $g(v_1) \in \ker(f)$ et $g(v_2) \in \ker(f)$

5. *Le noyau d'une application linéaire étant un espace vectoriel, il est stable par combinaison linéaire. Or, $g(v_1) \in \ker(f)$ et $g(v_2) \in \ker(f)$ donc toute combinaison linéaire de ces deux éléments est encore dans $\ker f$. Ce qui signifie exactement que*

$$\mathrm{Vect}\big(g(v_1), g(v_2)\big) \subset \ker(f)$$