

Évaluation du vendredi 22 Novembre

Durée : 1h30 (tiers-temps : 2h)

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1 ().

Partie I : un exemple dans \mathbb{R}^3

On considère les endomorphismes suivants :

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x + y + z \\ x + y + z \\ x + y + z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x - y + 2z \\ x - z \\ y - z \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que

$$\ker f = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad \ker g = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

2. En déduire des bases et les dimensions de $\ker f$ et $\ker g$.
3. Déterminer si f et g sont injectives.
4. Calculer les matrices A et B des endomorphismes f et g dans la base canonique.
5. Montrer que A et B ne sont pas inversibles, mais que $A + B$ l'est.
6. Montrer que les trois vecteurs suivants forment une base de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

7. Démontrer que $\ker f$ et $\ker g$ sont en somme directe.

Correction

1. On résout les systèmes linéaires associés et on trouve les résultats voulus. Autre méthode qui s'appuie sur les matrices A et B de la question 4 : on calcule le rang de ces matrices, puis par théorème du rang on trouve la dimension du noyau. Il suffit alors de vérifier que les vecteurs proposés dans l'énoncé sont bien dans le noyau et en forment une base
2. Les familles génératrices obtenues précédemment pour les deux noyaux sont libres (pour $\ker g$ il n'y a qu'un vecteur donc c'est immédiat, pour $\ker f$ les deux vecteurs ne sont pas colinéaires), donc sont des bases. Ainsi :

$$\dim(\ker f) = 2 \quad \dim(\ker g) = 1$$

3. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à $\{0\}$. Ici ce n'est pas le cas, ni pour f ni pour g donc aucune n'est injective.

4. On a, en identifiant les images à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. On calcule par exemple les déterminants, et on conclut.

6. Les trois vecteurs forment une base de \mathbb{R}^3 si la matrice formée par ces vecteurs est inversible. Or :

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad (\text{développement par rapport à la première colonnes}) \\ = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Ainsi la matrice est inversible et les vecteurs forment bien une base.

7. (les arguments de dimension liés par exemple à la formule de Grassmann n'avait pas encore été vus, mais ce serait un autre raisonnement possible)

Il s'agit de démontrer que $\ker f \cap \ker g = \{0\}$. Soit donc $v \in \ker f \cap \ker g$ et montrons que $v = 0$.

Puisque $v \in \ker f$ il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que :

$$v = a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque $v \in \ker g$ il existe $c \in \mathbb{R}$ tels que :

$$v = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On obtient donc :

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ -c \end{pmatrix} = 0$$

Or on sait que cette matrice est inversible (question précédente), donc $a = b = -c = 0$, et donc $v = 0$, ce qui conclut.

Partie II : cas général en dimension 2

Soit E un espace vectoriel de dimension 2.

Soit $h_1 \in \mathcal{L}(E)$ et $h_2 \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes de E non injectifs, tels que $h_1 + h_2$ est injectif. On rappelle que $h_1 + h_2$ est l'endomorphisme de E défini par $(h_1 + h_2)(x) = h_1(x) + h_2(x)$.

1. Justifier qu'il existe $x_1 \in \ker h_1$ et $x_2 \in \ker h_2$ tel que $x_1 \neq 0_E$ et $x_2 \neq 0_E$.

2. Montrer que la famille (x_1, x_2) est libre.

3. Justifier que

$$\dim(\ker h_1 + \ker h_2) \leq 2$$

4. Justifier que

$$\dim(\ker h_1 + \ker h_2) \geq 2$$

5. En déduire que

$$\ker h_1 \oplus \ker h_2 = E$$

Correction

1. Puisque h_1 et h_2 ne sont pas injectives, on a $\ker h_1 \neq \{0\}$ et $\ker h_2 \neq \{0\}$. Il y a donc d'autres éléments que 0 dans $\ker h_1$ et $\ker h_2$ (une infinité même puisque ce sont des sous-espaces vectoriels). Donc il existe $x_1 \in \ker h_1$ et il existe $x_2 \in \ker h_2$ tels que $x_1 \neq 0$ et $x_2 \neq 0$.
2. ce qui est en rouge n'est pas attendu dans la rédaction, mais dans votre tête

stratégie : je dois montrer qu'une famille est libre. Je ne sais pas quel genre d'objets sont x_1 et x_2 donc impossible d'espérer le justifier brièvement comme on le ferait avec deux vecteurs de \mathbb{R}^2 par exemple. Donc je reviens à la définition et je marque mon hypothèse : Supposons qu'on a $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = 0$$

je connais la définition de famille libre donc j'écris ce que je dois montrer : Montrons que $\lambda = 0$ et $\mu = 0$.

Maintenant il faut trouver des idées : je sais que $x_1 \in \ker h_1$ donc $h_1(x_1) = 0$. De même $h_2(x_2) = 0$. Je peux faire apparaître ces éléments en appliquant h_1 ou h_2 à la combinaison linéaire de départ : c'est une première idée. En appliquant h_1 à la combinaison linéaire, on a, par linéarité :

$$\lambda h_1(x_1) + \mu h_1(x_2) = 0$$

Or $x_1 \in \ker h_1$ donc $h_1(x_1) = 0$. Ainsi,

$$\mu h_1(x_2) = 0$$

là j'ai quand même l'impression d'avoir avancé puisque il ne me reste qu'un terme, par contre $h_1(x_2)$ pourrait éventuellement valoir 0 donc je ne peux pas conclure immédiatement que $\mu = 0$

Deux possibilités :

- soit $\mu = 0$, et dans ce cas en revenant à la combinaison linéaire initiale on a $\lambda x = 0$ et donc $\lambda = 0$ puisque x est non nul, et donc on a bien $\lambda = \mu = 0$ et la famille est libre.
- soit $h_1(x_2) = 0$. là il faut que je refasse le tour des hypothèses à ma disposition pour voir comment avancer. Je n'ai pas encore utilisé le fait que $h_1 + h_2$ est

injectif, c'est-à-dire que 0 est le seul élément du noyau de h_1+h_2 . Là j'ai $h_1(x_2) = 0$, mais on sait aussi que $h_2(x_2) = 0$ donc $(h_1+h_2)(x_2) = h_1(x_2) + h_2(x_2) = 0$, ce qui fait un lien avec le noyau de h_1+h_2 et devrait me permettre d'avancer. Puisque $x_2 \in \ker h_2$, on a

$$(h_1+h_2)(x_2) = h_1(x_2) + h_2(x_2) = 0 + 0 = 0$$

Ainsi $x_2 \in \ker(h_1+h_2)$. Or h_1+h_2 est injective donc $x_2 = 0$, ce qui est incohérent (question 1), donc le cas $h_1(x_2) = 0$ est impossible.

3. Puisque $\ker h_1$ et $\ker h_2$ sont des sous-espaces vectoriels de E , on a

$$\ker h_1 + \ker h_2 \subset E$$

Et donc la conséquence suivante sur les dimensions :

$$\dim(\ker h_1 + \ker h_2) \leq \dim(E)$$

Puisque $\dim(E) = 2$, cela conclut.

4. $x_1 = x_1 + 0 \in \ker h_1 + \ker h_2$. De même, $x_2 = 0 + x_2 \in \ker h_1 + \ker h_2$. Ainsi la famille (x_1, x_2) est une famille libre de deux éléments, dans $\ker h_1 + \ker h_2$.

Par conséquence du lemme de Steinitz ;

$$2 \leq \dim(\ker h_1 + \ker h_2)$$

5. D'après les deux questions précédentes, $\dim(\ker h_1 + \ker h_2) = 2$. De plus on sait que

$$\ker h_1 + \ker h_2 \subset E$$

Donc par inclusion et égalité des dimensions,

$$\ker h_1 + \ker h_2 = E$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Montrons que $\ker h_1 \cap \ker h_2 = \{0\}$. Soit donc $z \in \ker h_1 \cap \ker h_2$. On cherche à montrer que $z = 0$.

On a $h_1(z) = 0$ et $h_2(z) = 0$, donc $(h_1+h_2)(z) = h_1(z) + h_2(z) = 0$. Donc $z \in \ker(h_1+h_2)$. Or h_1+h_2 est injective donc 0 est le seul élément de son noyau. Ainsi, $z = 0$.

La somme est donc directe et finalement

$$E = \ker h_1 \oplus \ker h_2$$

Partie III : un résultat en dimension quelconque

Soit $n \geq 1$ un entier et soit E un espace vectoriel de dimension n .

On rappelle que le symbole \circ désigne la composition de deux applications : si f_1 et f_2 désignent deux endomorphismes de E , alors l'application composée $f_1 \circ f_2$ est définie par :

$$\text{pour tout } x \in E, (f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x))$$

Soit g et h deux endomorphismes de E tels que $g \circ h = 0$ et $g+h$ est injectif.

1. Montrer que $\text{Im } h \subset \ker g$.
2. Montrer que $\ker h \cap \ker g = \{0\}$

- Montrer que la famille de vecteurs formée par la concaténation d'une base de $\ker h$ et d'une base de $\ker g$, est libre.
- En déduire que

$$\dim(\ker g + \ker h) = \dim(\ker g) + \dim(\ker h)$$

Correction

- hypothèse* Soit $y \in \text{Im}(h)$. *traduction* Alors il existe $x \in E$ tel que $y = h(x)$.
but Démontrons que $y \in \ker g$. *traduction* C'est-à-dire démontrons que $g(y) = 0$.
démonstration : il n'y a quasi plus rien à faire car tout s'emboîte :

Or, $g(y) = g(h(x)) = (g \circ h)(x) = 0$ puisque par hypothèse $g \circ h = 0$. Donc $y \in \ker g$ et on a bien l'inclusion voulue.

- La démonstration est identique à celle de la correction question 5 de la partie II.
- Soient $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ et $\{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ deux bases respectives de $\ker g$ et $\ker h$. Montrons que la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p, w_1, w_2, \dots, w_k\}$ est libre.

Supposons donc que

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^k \mu_i w_i = 0$$

Montrons que $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = \mu_1 = \dots = \mu_k = 0$.

On a

$$\underbrace{\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i}_{\in \ker g} = - \underbrace{\sum_{i=1}^k \mu_i w_i}_{\in \ker f}$$

C'est-à-dire un élément de $\ker f$ qui a aussi une écriture dans $\ker g$. On a donc :

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \in \ker g \cap \ker f$$

et

$$\sum_{i=1}^k \mu_i w_i \in \ker g \cap \ker f$$

Or d'après la question précédente $\ker f \cap \ker g = \{0\}$ donc

$$\sum_{i=1}^p \lambda_i v_i = 0$$

et

$$\sum_{i=1}^k \mu_i w_i = 0$$

Mézalor, puisque les familles $\{v_i\}_{i=1, \dots, p}$ et $\{w_i\}_{i=1, \dots, k}$ sont libres (puisque ce sont des bases), on obtient :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_p = 0$$

et

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_k = 0$$

C'est ce qu'il fallait démontrer, donc la famille formée par la concaténation est bien libre.

4. *La concaténation des deux familles dans la question précédente fournit une famille génératrice de $\ker g + \ker h$. Or puisqu'elle est libre, c'est une base de $\ker g + \ker h$. Le nombre de vecteurs de cette famille étant $\dim(\ker g) + \dim(\ker h)$ (puisque l'on rassemble une base de $\ker g$ et une base de $\ker h$), on a :*

$$\dim(\ker g + \ker h) = \dim(\ker g) + \dim(\ker h)$$