Licence 3
Analyse 1
2024-2025

Institut Villebon Georges Charpak

# Évaluation 1 (9 octobre)

**1.** **a.** Dans les deux cas suivants, calculer la somme : $S_N = \displaystyle\sum_{n=1}^{N} u_n$.

$$\textbf{A}.\quad u_n = \pi^{-n}; \qquad \textbf{B}.\quad u_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

**Attention :** ne pas confondre $\sum_{n=1}^{N}$ et $\sum_{n=0}^{N}$.

**b.** Dans chacun des deux cas, dire si la série $\sum u_n$ est convergente. Dans le cas où elle est convergente, donner la valeur de la somme :

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n.$$

**2.** Étudier la nature des séries suivantes :

$(a)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(2n+1)^2}{3n^4+n^2+\sin n}$; $\quad$ $(b)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n+1)}{n}$;

$(c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+1}{n!}$; $\quad$ $(d)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^3-1+\ln n}$;

$(e)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{(n+4)^2}$; $\quad$ $(f)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$;

$(g)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (n+\cos n)\, \sin(1/n^3)$; $\quad$ $(h)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(\ln n)\sin(\pi n^2+1)}{n^3}$;

$(i)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$; $\quad$ $(j)$ $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \cos(3n) \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$.

**3.** Calculer les intégrales suivantes. Le paramètre $c$ est un réel supérieur ou égal à 1.

$(a)$ $\displaystyle I(c) = \int_1^c t e^{2t}\, dt$; $\quad$ $(b)$ $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)(t+3)}$;

$(c)$ $\displaystyle I = \int_0^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\, dx$; $\quad$ $(d)$ $\displaystyle I = \int_1^e t \ln t\, dt$.

## Évaluation 1 (4 octobre) : correction

**1. a. A.** On rappelle la somme de termes successitfs d'une suite géométrique de raison $r \neq 1$ :

$$\sum_{n=0}^{N} r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r}.$$

Ici, la somme commence à partir du terme $n = 1$. Pour la calculer, on peut par exemple factoriser par $r$ pour se ramener à une somme dont le premier terme est d'indice $n = 0$ :

$$(1) \qquad \sum_{n=1}^{N} r^n = r \sum_{n=0}^{N-1} r^n = r \frac{1 - r^N}{1 - r} = \frac{r - r^{N+1}}{1 - r}.$$

On peut écrire :

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \pi^{-n} = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n.$$

Donc, d'après la formule générale (1) :

$$S_N = \frac{\frac{1}{\pi} - (\frac{1}{\pi})^{N+1}}{1 - \frac{1}{\pi}} = \frac{1 - \frac{1}{\pi^N}}{\pi - 1}.$$

**B.** Il s'agit d'une série télescopique. En effet, $u_n$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_n = a_{n+1} - a_n,$$

avec

$$a_n = \ln n.$$

Donc :

$$\sum_{n=1}^{N} u_n = a_{N+1} - a_1 = \ln(N + 1) - \ln 1 = \ln(N + 1).$$

**b.** Rappel de cours : une série de terme général $u_n$ est dite convergente si la suite $(S_N)$ de ses sommes partielles est une suite convergente. Si elle est convergente, alors on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N.$$

Pour répondre à la question posée, il suffit donc d'étudier, dans les deux cas, la convergence de la suite $(S_N)$.

**A.** Puisque $1/\pi^N$ tend vers 0 quand $N$ tend vers l'infini, on a :

$$\frac{1 - \frac{1}{\pi^N}}{\pi - 1} \to \frac{1}{\pi - 1}$$

quand $N$ tend vers l'infini. Donc la suite $(S_N)$ converge et a pour limite $1/(\pi - 1)$. Donc la série correspondante est convergente et sa somme vaut : $S = 1/(\pi - 1)$.

**B.** Puisque $\ln(N+1)$ tend vers $+\infty$ quand $N$ tend vers $+\infty$, la limite de $S_N$ est $+\infty$ et la série est divergente. On peut écrire : $S = +\infty$.

**2.** Dans la suite, on note $u_n$ le terme général de la série considérée.

(a) Série à termes positifs. En particulier, le dénominateur est positif car, pour tout $n \geq 1$, $\sin n \geq -1$ donc $n^2 + \sin n \geq 0$ et $3n^4 + n^2 + \sin n > 0$.

Numérateur : $2n+1 \sim 2n$, donc, par produit d'équivalents, $(2n+1)^2 \sim (2n)^2 = 4n^2$.

Dénominateur :

$$3n^4 + n^2 + \sin n = 3n^4 \left(1 + \frac{1}{3n^2} + \frac{\sin n}{3n^4}\right).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $-1 \leq \sin n \leq 1$ donc :

$$-\frac{1}{3n^4} \leq \frac{\sin n}{3n^4} \leq \frac{1}{3n^4}$$

et donc, par le théorème des gendarmes, $\dfrac{\sin n}{3n^4}$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini. On en déduit que $1 + \dfrac{1}{3n^2} + \dfrac{\sin n}{3n^4}$ tend vers 1 à l'infini et donc que le dénominateur est équivalent à $3n^4$.

Par quotient d'équivalents, il vient que : que $u_n \sim 4/3n^2$. Comparaison par équivalents avec le terme général d'une série de Riemann convergente $(2 > 1)$ : la série converge.

(b) On sait que, pour tout $n \geq 2$, $\ln(n+1) \geq 1$ et donc :

$$\frac{\ln(n+1)}{n} \geq \frac{1}{n} \geq 0.$$

Comparaison par majoration avec le terme général de la série harmonique qui est divergente : la série est divergente.

(c) Série à termes positifs. Critère de D'Alembert :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 + 1}{(n^2+1)(n+1)} \sim \frac{1}{n} \to 0.$$

La série converge car $0 < 1$.

(d) Série à termes positifs. Pour $n \geq 2$ :

$$n^3 - 1 + \ln n = n^3 \left(1 - \frac{1}{n^3} + \frac{\ln n}{n^3}\right).$$

Croissances comparées : $\ln n / n^3$ tend vers 0 à l'infini. Donc $1 - \dfrac{1}{n^3} + \dfrac{\ln n}{n^3}$ tend vers 1 et, finalement, $u_n \sim 1/n^3$.

Comparaison par équivalents avec le terme général d'une série de Riemann convergente (car $3 > 1$) : la série est convergente.

(e) Série à termes positifs. Croissances comparées : à partir d'un certain rang,

$$\ln n \leq \sqrt{n}$$

et donc :

$$0 \leq u_n \leq \frac{\sqrt{n}}{(n+4)^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Comparaison par majorations avec le terme général d'une série de Riemann convergente (car $3/2 > 1$) : la série est convergente.

(f) Série à termes positifs. On sait que, pour tout $n \geq 3$, $\ln n \geq 1$ et donc :

$$u_n \leq \frac{1}{n^2}.$$

Comparaison par majoration avec le terme général d'une série de Riemann convergente (car $2 > 1$) : la série est convergente.

(g) Pour tout $n \geq 1$ :

$$0 \leq \frac{1}{n^3} \leq 1 \leq \frac{\pi}{2}$$

et donc $\sin(1/n^3) \geq 0$. La série est donc à termes positifs puisque $n + \cos n \geq n - 1 \geq 0$. On sait que $\sin u \sim u$ quand $u$ tend vers 0. Comme $1/n^3$ tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, on a :

$$\sin\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{n^3}.$$

Par ailleurs :

$$n + \cos n = n\left(1 + \frac{\cos n}{n}\right) \sim n$$

(il faut utiliser le théorème des gendarmes comme dans la question (a) pour affirmer que $(\cos n)/n \to 0$).

Donc

$$u_n \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Comparaison par équivalence avec le terme général d'une série de Riemann convergente (car $2 > 1$) : la série est convergente.

(h) La série n'est pas à termes positifs, on étudie sa convergence absolue. Pour tout entier $n$, on a $|\sin(\pi n^2 + 1)| \leq 1$ donc :

$$|u_n| \leq \frac{\ln n}{n^3}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, $\ln n \leq n$ donc :

$$|u_n| \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}.$$

Comparaison par majoration avec le terme général d'une série de Riemann convergente (car $2 > 1$) : la série est absolument convergente donc convergente.

(i) On applique le théorème sur les séries alternées : $u_n = (-1)^n v_n$ avec $v_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. La suite de terme général $\sqrt{n+1}$ est croissante et tend vers $+\infty$, donc son inverse est décroissante et tend vers 0. Donc le théorème s'applique et la série $\sum u_n$ est convergente.

(l) Série à termes de signes variables, on étudie la convergence absolue. Pour tout entier $n$, on a :

$$|u_n| \leq \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right).$$

On se rappelle ensuite que $\ln(1+u) \sim u$ quand $u$ tend vers 0. Donc, puisque $1/n^2$ tend vers 0, on a :

$$\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n^2}.$$

Comparaison par majoration, puis équivalents, avec une série de Riemann convergente ($2 > 1$) : la série $\sum |u_n|$ est convergente. Donc la série $\sum u_n$ est absolument convergente, et donc convergente.

**3.** (a) Intégration par parties : on pose $u(t) = t$ et $v'(t) = e^{2t}$, de sorte que : $u'(t) = 1$ et $v(t) = e^{2t}/2$.

On a donc :

$$\int_1^c te^{2t}\, dt = \left[\frac{1}{2}te^{2t}\right]_1^c - \frac{1}{2}\int_1^c e^{2t}\, dt = \frac{ce^{2c}}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}[e^{2t}]_1^c = \frac{ce^{2c}}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}(e^{2c} - e^2)$$

Donc, finalement :

$$\int_1^c te^{2t}\, dt = \frac{e^{2c}(2c-1) - e^2}{4}.$$

(b)

On réduit la fraction en éléments simples : cela consiste à déterminer deux constantes $A$ et $B$ telles que :

$$\frac{1}{(2t+1)(t+3)} = \frac{A}{2t+1} + \frac{B}{t+3}.$$

Si on multiplie cette égalité par $2t+1$, puis si l'on remplace $t$ par $-1/2$, on trouve :

$$A = -\frac{1}{3 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}.$$

Si on multiplie la même égalité par $t+3$, puis si l'on remplace $t$ par $-3$, on trouve :

$$B = -\frac{1}{5}.$$

On obtient alors :

$$\int_0^1 \frac{dt}{(2t+1)(t+3)} = \frac{2}{5}\int_0^1 \frac{dt}{2t+1} - \frac{1}{5}\int_0^1 \frac{dt}{t+3} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2}[\ln(2t+1)]_0^1 - \frac{1}{5}[\ln(t+3]_0^1.$$

Finalement :

$$I = \frac{1}{5}\ln 3 - \frac{1}{5}(\ln 4 - \ln 3) = \frac{1}{5}\ln(9/4) = \frac{2}{5}\ln(3/2).$$

(c) Changement de variables : on pose $u = \sin x$, de sorte que $du = \cos x\ dx$. Alors :

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\ dx = \int_{\sin 0}^{\sin(\pi/2)} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_0^1 = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

D'autre part :

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}\ dx = \int_{\sin(\pi/2)}^{\sin \pi} \frac{du}{1+u^2} = [\arctan u]_1^0 = -\arctan 1 = -\frac{\pi}{4}.$$

Donc

$$I = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 0.$$

(d) Intégration par parties : on pose $u(t) = \ln t$ et $v'(t) = t$, de sorte que : $u'(t) = 1/t$ et $v(t) = t^2/2$.

On a donc :

$$\int_1^e t\ln t\ dt = \left[\frac{t^2\ln t}{2}\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{t^2}{t}\ dt = \frac{e^2\ln e}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e t\ dt = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4}[t^2]_1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$