L2 S3 **Université Paris Sud**
Meu 204 **2023-2024**

Examen Partiel MEU 204

Ni les calculatrices, ni les documents, ni les téléphones portables ne sont autorisés.

Durée 2 heures

Exercice 1 :

1. Déterminer tous les éléments d'ordre 4 du groupe $\mathbb{C}^*$ [La loi de composition ici est la multiplication].

2. Montrer que l'ensemble des nombres premiers est infini .

Exercice 2 : On pose $a = 2^3 \times 5^2 \times 7 = 1400$ et $b = 2 \times 5^3 \times 11 = 2750$.

1. Calculer $pgcd(a, b)$ et $ppcm(a, b)$.[Pour le $ppcm$, on se contentera de le donner sous la forme d'un produit de facteurs premiers]

2. Retrouver $pgcd(a, b)$ en appliquant l'algorithme d'Euclide .

Exercice 3 : On pose $u_n = 4^{2n+2} - 1$ et $v_n = 4^{2n+2} - 15n - 16$

1. Montrer que $15 \mid u_n$ pour tout entier naturel n.

2. Montrer que $225 = 15^2$ divise $(v_{n+1} - v_n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

3. En déduire que 225 divise v_n pour tout entier naturel n.

4. [**Facultatif**] Montrer sans utiliser un raisonnement par récurrence que v_n est un mutiple de 225 pour tout entier naturel n.

Exercice 4 : Le but de cet exercice est de déterminer tous les entiers naturels a, b qui vérifient :

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 5409 \\ ppcm(a, b) = 360 \end{cases} \tag{1}$$

1. Montrer que $pgcd(5409, 360) = 9$. [L'utilisation de l'algorithme d'Euclide est exigée].

2. Soit p un nombre premier , on suppose que $p \mid ppcm(a, b)$, montrer que $p \mid a$ ou $p \mid b$. En déduire que $3 \mid a$ et $3 \mid b$

TSVP

3. On pose $c = \frac{a}{3}, d = \frac{b}{3}$. Montrer que $ppcm(c,d) = 120$ et $c^2 + d^2 = 601$.

4. Calculer $pgcd(601, 120)$ et en déduire que $cd = 120$ [Justifier votre réponse].

5. En calculant $(c-d)^2$ et $(c+d)^2$, montrer que $\{a, b\} = \{15, 72\}$ [On rappelle que $19^2 = 361, 29^2 = 841$]

Exercice 5 : Soit $n \geq 2$ un entier, on suppose que pour tout entier $a \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$, on a $a^{n-1} \equiv 1[n]$.

1. Montrer que $pgcd(n, a) = 1$ pour tout entier $a \in \{1, 2, \cdots, n-1\}$.

2. En déduire que n est premier .

Exercice 6 : Soient m, n deux entiers naturels qui vérifient : $m^2 \mid n^2$. Montrer que $m \mid n$.

Exercice 7 : Soit G un groupe et $H \subset G$ une partie non vide et finie de G stable par composition , ie $ab \in H$ pour tout éléments a, b de H.

Montrer que H est un sous groupe de G. [Indication , Soit $a \in H$, regarder a^k pour tous les entiers k]

Exercice 8 : [**Facultatif**] Soit $M = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre $n \geq 2$ qui vérifie : a_{ii} est un nombre impair et a_{ij} est un nombre pair si $i \neq j$.

Montrer que M est inversible .