Table des matières

Chapitre 4

AAV 4 : Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF31 : Connaître les valeurs importantes de ln et exp
- ☐ SF32 :Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression
- ☐ SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression
- ☐ SF34 : Connaître la définition d'une puissance non entière

4.1 Motivation

4.1.1 Quelques problèmes introductifs

Voici une liste de problèmes afin d'aiguiser votre curiosité :

- **Multiplication bactérienne :**
  On considère une boite de Pétri dans laquelle le nombre de bactéries est multiplié par 2 chaque jour. Au départ, il y a une seule bactérie. En combien de jours le nombre de bactéries aura-t-il dépassé les 10000 unités ?
- **Loi de puissance en physique :** On mesure le champ magnétique produit par un aimant en fonction de la distance. On dispose d'une série de mesures de ce champ en fonction de la distance. On sait que celui-ci est une puissance de la distance. On cherche à trouver cette puissance. Comment faire ?
- **Mathématiques :** Pourriez-vous donner le nombre de chiffres de $7^{(2^{10})}$?
- **Géométrique :** Etant donnés deux réels x, y strictement positifs, sauriez-vous tracer le produit xy sans aucun calcul ?
- **Humour :** Comprendrez-vous cette blague ? Logarithme et exponentielle sont sur un bateau. Soudain, d'énormes vagues arrivent. Logarithme crie : "On dérive !!! " et l'exponentielle : "C'est pas grave".

Tous ces problèmes vont trouver leurs réponses au travers des outils introduits dans ce chapitre sauf pour la blague qui aura sa réponse un peu plus tard.

4.1.2 Faire des produits de grands nombres

Mathématiques et astronomie : Un des problèmes majeurs des astronomes du 17ème siècle est d'effectuer des produits de grands nombres. Imaginez donc le monde sans calculatrice ni ordinateur de l'époque. Pourriez-vous calculer le plus rapidement possible et sans erreur le produit suivant 106543×26644 ? Une des branches mathématiques de l'époque a donc eu pour but de rendre ces calculs plus simples. Et pour cela, diverses méthodes ont été utilisées pour "transformer les produits en addition". Pour donner un exemple simple, imaginez que vous connaissiez la table des puissances de 2 et que vous souhaitiez calculer 16×64. Le résultat faisable à la main est 1024. Une façon de le faire plus rapide est de constater que $16 \times 64 = 2^4 \times 2^6 = 2^{4+6} = 2^{10} = 1024$. Ainsi, supposant connue la table des puissances de 2, toute la complexité du produit a été transformé dans le simple calcul d'une addition "$4 + 6$" ce qui simplifie considérablement les choses !

Afin de transformer multiplication en addition, Napier a introduit les logarithmes ainsi que des tables de calculs logarithmiques. Nous allons dans ce chapitre étudier un des logarithmes. Pour le définir, nous avons besoin de la fonction exponentielle qui sera la "réciproque" du logarithme dit néperien. Autrement dit, cette fonction transforme les additions en multiplications.

4.2 Fonction exponentielle

4.2.1 Définition

Définition 1: Exponentielle

On appelle fonction exponentielle (que nous noterons exp) l'unique fonction dérivable f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^\star$ vérifiant :

- pour tous u, v réels, $f(u+v) = f(u)f(v)$.
- $f'(0) = 1$.

Remarque 1:

La définition $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$ signifie que l'exponentielle transforme l'addition en multiplication.

4.2.2 Propriétés

L'objectif de ce paragraphe est de démontrer toute une série de propriétés de l'exponentielle que vous connaissez et qui seront utiles en pratique. Nous allons voir que toutes ces propriétés découlent directement de la définition. La première concerne la valeur de l'exponentielle en 0.

Proposition 1:

- $\exp(0) = 1$.

Preuve à faire par tous :

- Ecrivez TOUT ce qu'on sait sur la fonction exponentielle (dans ce chapitre, partez du principe que vous n'avez jamais vu la fonction exponentielle) et ce que vous voulez démontrer.

Ce qu'on sait :

- exp est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
- $\exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$.
- $\exp(1) = e$.

Ce qu'on veut : $\exp(0) = 1$.

- Prouvez alors que $\exp(0) = 1$.

$$\begin{aligned} \exp(0) &= \exp(0)\exp(0) && \text{car } \exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) \\ &= \exp(0)^2 && \text{par définition du carré} \end{aligned}$$

Donc $\exp(0) - \exp(0)^2 = 0$ (en soustrayant des deux côtés $\exp(0)^2$).
Donc $\exp(0)(1 - \exp(0)) = 0$ (en factorisant par $\exp(0)$).
Or $\exp(0) \neq 0$ (on sait que exp est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$).
Donc $1 - \exp(0) = 0$ (car si un produit est nul, un des termes est nuls).
Donc $\exp(0) = 1$ (en ajoutant $\exp(0)$ des deux côtés).

Les propriétés sont des formules algébriques très utiles dans les calculs pratiques.

Proposition 2:

- Pour tout x, y réels, $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$.
- Pour tout x réel, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$.
- Pour tout x réel, q entier rationnel, $\exp(qx) = \exp(x)^q$.
- Pour tout x réel, $\exp(x) > 0$.

Preuve :

La première proposition est la définition de l'exponentielle.

- Soit x réel, calculez $\exp(x)\exp(-x)$ et en déduire la seconde formule.

$$\begin{aligned} \exp(x)\exp(-x) &= \exp(x - x) && \text{car } \exp(u+v) = \exp(u)\exp(v) \\ &= \exp(0) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Donc en divisant par $\exp(x)$, on obtient la formule demandée.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Justifiez par un argument tous les points. numérotés.

Cette partie s'adresse à ceux qui ont déjà vu le principe de récurrence.
Démontrons la troisième proposition d'abord pour n entier naturel : $\exp(nx) = \exp(x)^n$.
Initialisation : $\exp(0x) \underset{(1)}{=} 1 \underset{(2)}{=} \exp(x)^0$.

Hérédité : Supposons qu'au rang n, $\exp(nx) = \exp(x)^n$. On veut montrer qu'au rang $n+1$, $\exp((n+1)x) = \exp(x)^{n+1}$.

Or $\exp((n+1)x) \underset{(3)}{=} \exp(nx + x) \underset{(4)}{=} \exp(nx)\exp(x) \underset{(5)}{=} \exp(x)^n \exp(x) \underset{(6)}{=} \exp(x)^{n+1}$.

Donc on a bien démontré sur les entiers n naturels que $\exp(nx) = \exp(x)^n$.

Démontrons la troisième proposition maintenant pour les entiers relatifs négatifs sachant qu'on vient de la montrer pour les entiers naturels : Soient x un réel et p un entier relatif strictement négatif alors :
$\exp(px) \underset{(7)}{=} \exp((-p)(-x)) \underset{(8)}{=} \exp(-x)^{-p} \underset{(9)}{=} \dfrac{1}{\exp(x)^{-p}} \underset{(10)}{=} \exp(x)^p$.

Démontrons la enfin pour q un entier rationnel : q est une fraction de la forme $\frac{p}{r}$ avec p entier relatif et r entier naturel.
Donc $\exp(qx)^r \underset{(11)}{=} \exp(rqx) \underset{(12)}{=} \exp(px) \underset{(13)}{=} \exp(x)^p \underset{(14)}{=} (\exp(x)^q)^r$.
Donc $\exp(qx) \underset{(15)}{=} \exp(x)^q$.

Démontrons la quatrième proposition : soit x réel, alors $\exp(x) = \exp(\frac{2x}{2}) \underset{(16)}{=} (\exp(2x))^{\frac{1}{2}} \underset{(17)}{>} 0$.

(1) : car $\exp(0) = 1$
(2) : car $a^0 = 1$ pour a réel
(3) : on développe $(n+1)x$
(4) : $exp(u+v) = \exp(u)\exp(v)$
(5) : Hypothèse de récurrence.
(6) : pour a réel, p, q entiers relatifs, $a^{p+q} = a^p a^q$
(7) : $-$ fois $-$ donne $+$.
(8) : on utilise la propriété $\exp(nx) = \exp(x)^n$ qu'on a déjà démontrée sur les entiers naturels (dans le but de la montrer sur les entiers relatifs).
(9) : pour x réel $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ et $(\frac{a}{b})^{-p} = \frac{a^{-p}}{b^{-p}}$
(10) : car $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.
(11) : on utilise la propriété $\exp(nx) = \exp(x)^n$ qu'on a déjà démontrée sur les entiers naturels
(12) : car $q = \frac{p}{r}$
(13) : on utilise la propriété $\exp(nx) = \exp(x)^n$ qu'on a déjà démontrée sur les entiers naturels
(14) : car $q = \frac{p}{r}$ et $a^{mn} = (a^m)^n$
(15) : on met à la puissance $\frac{1}{r}$.
(16) : on utilise la propriété $\exp(qx) = \exp(x)^q$ qu'on a démontrée sur les rationnels pour $q = \frac{1}{2}$
(17) : une racine carrée d'un réel positif est positive. Elle n'est pas nulle car l'exponentielle ne s'annule pas.

Remarque 2: La vidéo associée

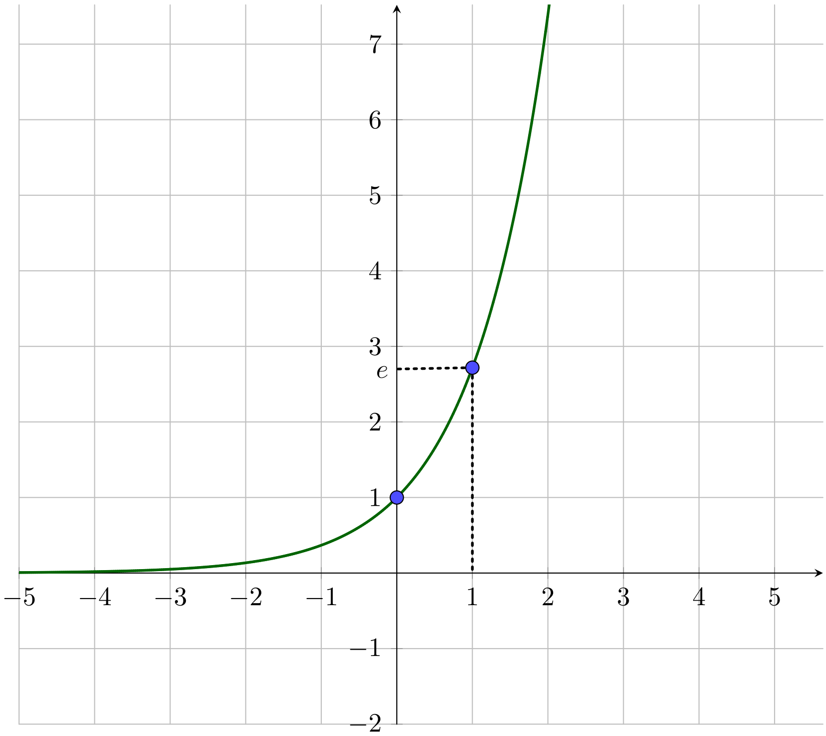
Il est temps de consulter la vidéo : *SF31, SF32, SF 33 ln et exp.*

Questions :

- Faites les questions 2, 7, 8 de l'exercice 3 page 15, les questions de l'exercice 6 et 5 questions de l'exercice 1 page 15.

4.2.3 Graphe

Voici le graphe de la fonction exponentielle :



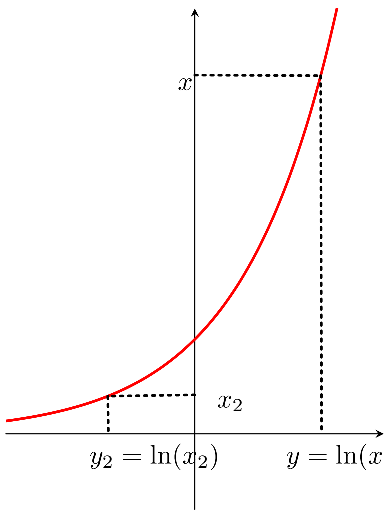
Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

4.3 Fonction logarithme népérien

4.3.1 Définition

Pour définir la fonction logarithme népérien, nous avons besoin du tracé de la fonction exponentielle ci-dessous. On peut remarquer que pour chaque ordonnée réelle positive notée x, on peut trouver un unique antécédent par la fonction exponentielle cad un unique réel dont l'exponentielle vaut x. Ce réel appelé y c'est ce qu'on va appeler le logarithme népérien de x et sera noté $\ln(x)$.



Définition 2: Logarithme népérien

Soit $x > 0$, on appelle logarithme népérien de x et on note $\ln(x)$, l'unique réel y tel que $\exp(y) = x$. On définit alors la fonction ln ainsi :

$$\begin{array}{rccc} \ln & : & \mathbb{R}_+^\star & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \ln(x) = y \end{array}$$

Remarque 3:

Autrement dit $\ln(x)$ est construit de sorte que $\exp(\ln(x)) = x$. On parle de **fonctions réciproques** l'une de l'autre. En effet quand on prend un x qu'on lui applique ln puis exp, on retombe sur x.

Notez que de même pour x réel, $\ln(\exp(x)) = x$. En effet, d'après la définition 2, $\ln(\exp(x))$ est l'unique réel y tel que $\exp(y) = \exp(x)$. Or x convient et étant unique $y = x$ cad $\ln(\exp(x)) = x$.

La remarque et la définition précédente expliquent la proposition suivante :

Proposition 3:

- Pour tout x réel, $\ln(\exp(x)) = x$.
- Pour tout $x > 0$, $\exp(\ln(x)) = x$.

Questions :

Expliquez pourquoi $\exp(\ln(x)) = x$ n'est valable que pour $x > 0$ alors que $\ln(\exp(x)) = x$ l'est pour x réel.

C'est une question d'ensemble de définition : $\ln(x)$ est définie pour $x > 0$ alors que $\exp(x)$ l'est pour tout x réel.

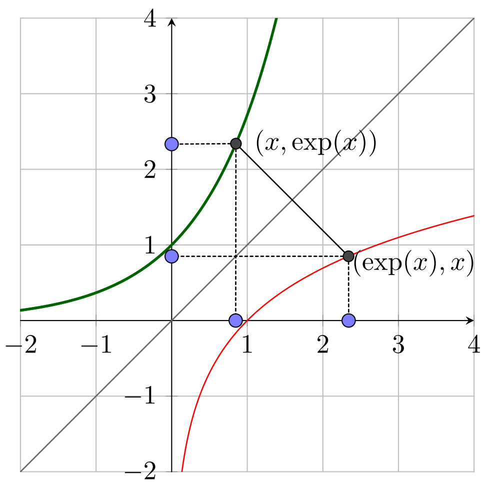
Proposition 4:

Les graphes de exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Grâce à cela, on peut construire le graphe du ln : regardez la vidéo *construction de ln via exp.gif*.

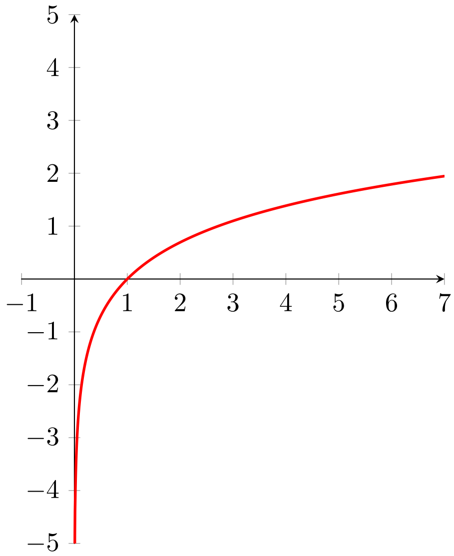
Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

- But : On veut démontrer que exp et ln sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.
- Traduction du but : cad que pour $(x, \exp(x))$ un point du graphe de exp, on veut mq $(\exp(x), x)$ est sur le graphe de ln.



Or si on note $y = \exp(x)$ alors par définition du ln, $x = \ln(y)$ donc $(\exp(x), x) = (y, \ln(y))$ est un point sur le graphe du ln.

Voici le graphe du ln. Cette fonction n'est pas définie sur les réels négatifs ou nuls.



Questions :

Expliquez comment tracer ln à partir de l'exponentielle.

4.3.2 Propriétés

Nous avons vu à la section 4.2.2 que l'exponentielle possédait plusieurs propriétés algébriques dont le fait qu'elle transformait l'addition en multiplication. Les fonctions ln et exp étant réciproques l'une de l'autre, la fonction ln va récupérer les propriétés inverses de l'exponentielle. En particulier ln transforme la multiplication en addition. L'objectif de cette section est donc de recenser et de démontrer ces propriétés.

Proposition 5:

- $\ln(1) = 0$.
- Pour tout $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$.
- Pour tout $x > 0, y > 0$, $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$.
- Pour tout $x > 0$, q nombre rationnel, $\ln(x^q) = q\ln(x)$.

Preuve :

- Pour tous les points numérotés, donnez un argument.

Ces propriétés sont des conséquences de la proposition 2 et de la remarque 3. L'idée est la suivante : pour montrer que $X = Y$ il suffit de montrer que $\exp(X) = \exp(Y)$ car alors $\ln(\exp(X)) = \ln(\exp(Y))$ et donc $X = Y$.

- On sait que $\exp(0) = 1 \underset{(1)}{\textit{donc}} \ln(\exp(0)) = \ln(1) \underset{(2)}{\textit{donc}} 0 = \ln(1)$.
- Soit $x > 0$. Posons $X = \ln(\frac{1}{x})$ et $Y = -\ln(x)$ et montrons que $\exp(X) = \exp(Y)$.

$\exp(X) = \exp(\ln(\frac{1}{x})) \underset{(3)}{=} \frac{1}{x}$.

$\exp(Y) = \exp(-\ln(x)) \underset{(4)}{=} \exp(\ln(x^{-1})) \underset{(5)}{=} x^{-1} = \exp(X)$.

- Soient $x > 0, y > 0$. Posons $X = \ln(\frac{x}{y})$ et $Y = \ln(x) - \ln(y)$ et montrons que $\exp(X) = \exp(Y)$.

  Or $\exp(X) = \exp(\ln(\frac{x}{y})) \underset{(6)}{=} \frac{x}{y}$.

  et $\exp(Y) = \exp(\ln(x) - \ln(y)) \underset{(7)}{=} \exp(\ln(x))\exp(-\ln(y)) \underset{(8)}{=} x\exp(\ln(y^{-1})) \underset{(9)}{=} xy^{-1} = \exp(X)$.
- Soient $x > 0$, q un rationnel, Posons $X = \ln(x^q)$ et $Y = q\ln(x)$ et montrons que $\exp(X) = \exp(Y)$.

  Or $\exp(X) \underset{(10)}{=} x^q$ et $\exp(Y) = \exp(q\ln(x)) \underset{(11)}{=} \exp(\ln(x^q)) \underset{(12)}{=} x^q = \exp(X)$.

(1) : si $a = b > 0$ alors $\ln(a) = \ln(b)$
(2) : $\ln(\exp(x)) = x$ pour tout x réel.
(3) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.
(4) : c'est la 4ème propriété de la proposition 5.
(5) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.
(6) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.
(7) : $\exp(u + v) = \exp(u)\exp(v)$
(8) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$ et on utilise la 4ème propriété de la proposition 5.
(9) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.
(10) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.
(11) : c'est la 4ème propriété de la proposition 5.
(12) : $\exp(\ln(x)) = x$ pour tout $x > 0$.

Toutes ces propriétés sont évidemment très utiles pour les calculs en pratique.

Remarque 4: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF31, SF32, SF 33 ln et exp.*

Questions :

- Faites les questions pas encore faites des exercices 3, 6, 1 pages 15, 16 et 15.

4.3.3 Applications

La multiplication bactérienne

On considère une boite de Pétri dans laquelle le nombre de bactéries est multiplié par 2 chaque jour. Au départ, il y a une seule bactérie. Déterminer approximativement le nombre de jours en lequel le nombre de bactéries aura passé les 10000 unités.

Questions :

Pour répondre à ce problème,

- traduisez-le mathématiquement : recenser les informations, donner des noms de variable à ce qu'on cherche, écrire chacune de ces informations en langage mathématique.
  - On note N le jour et B_N le nombre de bactéries au jour N.
  - Au départ, il y a une seule bactérie : $B_0 = 1$.
  - Le nombre de bactéries est multiplié par 2 chaque jour : $B_{N+1} = 2B_N$
  - Déterminer approximativement le nombre de jours en lequel le nombre de bactéries aura passé les 10000 unités : trouver N tel que $B_N \geq 10000$.
- réfléchissez en quoi la fonction ln pourrait intervenir.

On montre par récurrence que $B_N = 2^N$. On cherche donc N tel que $2^N \geq 10000$.
Or

$$\begin{aligned} 2^N \geq 10000 &\iff \ln(2^N) \geq \ln(10^4) && \text{en prenant le ln de gauche à droite, l'exponentielle sinon} \\ &\iff N\ln(2) \geq 4\ln(10) && \text{propriété 4 de la proposition 5} \\ &\iff N \geq 4\frac{\ln(10)}{\ln(2)} && \text{en divisant les deux côtés par } \ln(2) \end{aligned}$$

En 14 jours, le nombre de bactéries aura passé 10000.

Tracé en échelle logarithmique

On dispose des données suivantes du champ magnétique B en fonction de la distance :

d (cm)	30	25	20	18	16	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5
B (Tesla)	1.85	3.5	6.75	9.05	12.65	18.5	23	28.8	36.4	47.25	62	84.5	120.8	179	279.5

On sait qu'il existe deux constantes C et α telles que $B = Cd^{\alpha}$. Comment trouver α ?

Comme $B = Cd^{\alpha}$ alors $\ln(B) = \ln(C) + \ln(d^{\alpha}) = \alpha\ln(D) + \ln(C)$. Ceci est de la forme $y = ax + b$ avec $y = \ln(B)$, $a = \alpha$, $x = \ln(D)$ et $b = \ln(C)$. Donc si vous tracez $\ln(B)$ en fonction de $\ln(D)$, vous trouverez une droite dont la pente est α. Il suffira alors de lire la pente pour trouver $\alpha = -3$.

Pour aller plus loin : Compter le nombre de chiffres d'un nombre

Quel est le nombre de chiffres de $7^{(2^{10})}$? Pour cela, on vous donne accès à la fonction $\log_{10} : x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{\ln(10)}$ qui vaut 1 en $x = 10$. Notez que cette fonction est simplement une constante fois le logarithme népérien : elle conserve donc toutes les propriétés calculatoires vues dans ce chapitre.

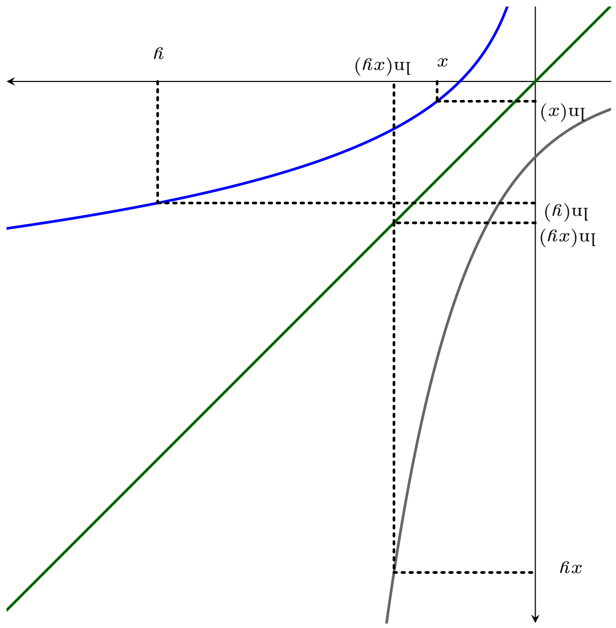
Si un nombre N possède p chiffres, il vérifie $10^{p-1} \leq N < 10^p$.
Par exemple, $10^1 \leq 99 < 10^2$.
Donc $p - 1 \leq \log_{10}(N) < p$ puisque $\log_{10}$ est une fonction croissante.

Donc si on prend la partie entière de $\log_{10}(N)$, on obtient $p - 1$. Donc p est la partie entière de $\log_{10}(N)$ plus 1.

Ici $N = 7^{(2^{10})}$ donc $\log_{10}(N) = 2^{10}\log_{10}(7) = 1024\log_{10}(7) \sim 1024 \times 0.8451 = 865.38$. Donc N a 866 chiffres.

Pour aller plus loin : dessiner n'importe quel produit

On vous donne deux réels strictement positifs x et y, donnez une stratégie pour dessiner xy sans aucun calcul !



L'idée est d'utiliser que $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. Comme on connait x et y, on peut dessiner leurs logarithmes respectifs en ordonée et donc leur somme qui vaut $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ (on sait facilement dessiner une somme). Ayant tracé $\ln(xy)$, il suffit de le reporter sur l'axe des x puis de prendre son image par l'exponentielle pour obtenir xy.

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices du chapitre 4

4.1 Travailler les savoir faire

Exercice 1

Savoir faire

- SF9 :Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)

Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Écrire sous la forme x^p, avec $p \in \mathbb{Q}$, les expressions suivantes :

1. $\dfrac{1}{x^3}$
2. $\dfrac{x^2}{x^9}$
3. $\dfrac{x^7}{x^{-5}}$
4. $\dfrac{x^{-2}}{x^{-3}}$
5. $\left(x^{2/3}\right)\left(x^{5/2}\right)$
6. $\left(x^{2/3}\right)^{5/2}$
7. $\dfrac{x^{7/2}}{x^{5/3}}$
8. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x}}$
9. $\sqrt[5]{x}\sqrt[3]{x}$
10. $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x}}$

Exercice 2 *QCM-667*

Savoir faire

- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

À quoi est égal $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right)$?

- ☐ $-\dfrac{1}{2}$
- ☐ 1
- ☐ -1

Exercice 3

Savoir faire

- SF31 : Connaître les valeurs importantes de ln/exp

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 13.1, 13.2, 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

Que vaut :

1. $\ln(1)$
2. e^0
3. $\ln(e^x)$ pour $x \in \mathbb{R}$
4. $e^{\ln(x)}$ pour $x \in \mathbb{R}_+\star$
5. $\ln(ab)$ pour $a > 0, b > 0$.
6. $\ln(\frac{a}{b})$ pour $a > 0, b > 0$.
7. e^{a+b} pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.
8. $(e^a)^b$ pour $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 *QCM-541*

Savoir faire

- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

Que vaut $\ln(\sqrt{3})$?

- ☐ $-2\ln(3)$
- ☐ $\ln(3)/2$
- ☐ $\sqrt{2}\ln(3)$
- ☐ 0

Exercice 5 *QCM-537*

Savoir faire

- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression
- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression

Quelle est la valeur de $\ln(e^5) - 4$?

- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ 2
- ☐ 3

Exercice 6 *Simplifications*

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 13.1, 13.2, 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

Simplifiez les expressions suivantes :

1. $\frac{2^4 3^5}{5^3 3^2 2^2}$.
2. $\sqrt{128}$.
3. $\frac{t}{t^2 x}$.
4. $\frac{n 8^{n+1}}{(n+1)8^n}$.
5. $\frac{256}{484}$.
6. $\frac{1}{3} - \frac{1}{6}$.
7. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$.
8. $e^{2\ln(2)} - \ln(\frac{4}{3}) - \ln(3)$.
9. $\frac{(e^2)^2}{e^8 e^{-2}}$.

Exercice 7 *Formules de produit/somme de ln et exp*

Savoir faire

- SF34 : Connaître la définition d'une puissance non entière
- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression

Simplifiez si vous le pouvez (écrivez "aucune simplification possible" si vous l'expression ne peut pas etre simplifiée) :

1. $e^a e^b =$

2. $e^a + e^b =$

3. $\ln(a) + \ln(b) =$

4. $\ln(a)\ln(b) =$

5. $a^b =$

4.2 Exercices de niveau Avancé et expert

Exercice 8 *Niveau avancé*
On admet toutes les formules du cours sur le ln. Redémontrer le maximum de formules concernant l'exponentielle en partant des formules du ln. (Si vous êtes bloqués, les preuves sont dans le poly de cours).

Exercice 9 *Niveau Expert*
En admettant que pour tout $x, y > 0$, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ et $\exp(\ln(x)) = x$, expliquer comment à l'aide des graphiques des fonctions exponentielles et ln, on peut placer graphiquement le produit xy sans aucun calcul.

Exercice 10 *Niveau Expert*
Dans cet exercice, vous aurez besoin de maîtriser la notion d'intégrale (AAV 11) pour les questions. On définit le ln par $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{t}$ pour $x > 0$ et on ne peut dans cet exercice utiliser aucune propriété connue du ln hormis le fait qu'elle soit continue sur $\mathbb{R}_+^\star$. On ne peut sauf indication dériver ln. On admet que tout réel est limite d'une suite de nombres rationnels. On admet aussi que si f est continue en a un réel et que si une suite x_n tend vers a quand $n \to +\infty$ alors $f(x_n)$ tend vers $f(a)$.

1. Expliquez graphiquement puis par un argument mathématique rigoureux pourquoi pour $0 < x \leq 1$, $\ln(x) \leq 0$ et pour $x > 1$, $\ln(x) > 0$. Expliquez pourquoi $\ln(1) = 0$
2. Que peut-on dire en termes de monotonie pour la fonction ln. Expliquez graphiquement puis prouvez votre conjecture par un argument mathématique rigoureux.
3. Démontrez que pour tout x, y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$. *On pourra penser au cours du raisonnement à effectuer un changement de variable.*
4. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(\frac{1}{x}) = -\ln(x)$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}, \ln(x^n) = n\ln(x)$.
5. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $k \in \mathbb{Z}, \ln(x^k) = k\ln(x)$.
6. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $p \in \mathbb{Q}, \ln(x^p) = p\ln(x)$.
7. En déduire que pour tout $x > 0$, pour tout $a \in \mathbb{R}, \ln(x^a) = a\ln(x)$.

Chapitre 5

AAV 9 : Utiliser les nombres complexes

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF 212 : Savoir placer des angles (angles remarquables, x, Pi + x, ...), leurs cos et leur sin sur un cercle trigo
- ☐ SF 46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo
- ☐ SF 47 : Connaître les formules basiques d'addition
- ☐ SF 48 : Savoir résoudre des équations trigonométriques simples (type sin(x)=1/2)
- ☐ SF 1189 : Savoir placer un point dans le plan complexe
- ☐ SF 77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- ☐ SF 78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué
- ☐ SF 79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- ☐ SF 80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- ☐ SF 213 : Savoir utiliser la technique de l'angle moitié pour simplifier une expression
- ☐ SF 81 : Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes
- ☐ SF 82 : Connaître les formules d'Euler et les formules de Moivre
- ☐ SF 1256 : Savoir identifier partie réelle et imaginaire
- ☐ SF 1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires
- ☐ SF 83 : Utiliser les formules d'Euler pour linéariser ou simplifier des expressions trigonométriques

5.1 Les fonctions trigonométriques

Nous vous conseillons avant de commencer de relire rapidement le petit paragraphe sur les fonctions trigonométriques du cours de l'AAV3 : Trouver le lien entre une fonction et son graphique

5.1.1 Valeurs remarquables

Remarque 5: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux vidéos : *SF46 intro cercle trigo (Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo)* et *SF46 Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo.*

Proposition 6:

Soit x un réel, alors $\cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 1$.

Questions :

- Expliquez géométriquement d'où vient la proposition 6 ? De quel résultat découle-t-elle ? Si vous ne savez pas répondre à la question il faut reprendre l'explication donnée dans la vidéo *SF46 intro cercle trigo (Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo).*
- Faire l'exercice 11 page 47.

5.1.2 Formules trigonométriques

Remarque 6: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 47,212 Connaître les formules basiques d'addition, placer des angles sur un cercle trigo.*

Dans cette vidéo, nous avons admis la proposition suivante.

Proposition 7: Admise

- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.

La vidéo donne aussi une vision géométrique des propriétés suivantes.

Proposition 8:

- $\cos(-x) = \cos(x)$ (cos est paire).
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (sin est impaire).
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$.
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$.

Preuve à faire par tous :

A l'aide de la proposition 7 et des deux premières propriétés, redémontrez les quatre dernières propriétés.

- $\cos(\pi - x) = \cos(\pi)\cos(-x) - \sin(\pi)\sin(-x)$ d'après la proposition 7
  $= -\cos(x)$ car cos est paire et $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$
- $\sin(\pi - x) = \sin(\pi)\cos(-x) + \cos(\pi)\sin(-x)$ d'après la proposition 7
  $= \sin(x)$ car sin est impaire et $\cos(\pi) = -1$, $\sin(\pi) = 0$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(\frac{\pi}{2})\cos(-x) - \sin(\frac{\pi}{2})\sin(-x)$ d'après la proposition 7
  $= \sin(x)$ car sin est impaire et $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(\frac{\pi}{2})\cos(-x) + \sin(-x)\cos(\frac{\pi}{2})$ d'après la proposition 7
  $= \cos(x)$ car cos est paire et $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

Questions :

- Faites l'exercice 15 page 48.
- Expliquez graphiquement ce que signifie le fait que cos soit paire et que sin soit impaire ainsi que la formule $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$.

5.1.3 Equations trigonométriques

Remarque 7: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux vidéos : *SF 48 : savoir résoudre des équations trigonométriques simples (partie 1 et 2).*

Questions :

- Construisez sur un dessin les solutions de $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Expliquez pourquoi elle a une infinité de solutions sur ce dessin sans aucun calcul. Si vous ne savez pas répondre, repassez sur la vidéo.
- Faire deux exemples de l'exercice 28 page 51.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.2 Pourquoi les nombres complexes

Au moyen-âge, un des domaine de prédilections des mathématiciens était la résolution des équations algébriques de degré 3. Vous avez résolu des équations algébriques d'ordre 1 comme $x + 4 = 0$, d'ordre 2 comme $x^2 - 4x + 1 = 0$. Les solutions de ce type d'équation étaient connus de l'époque et les mathématiciens s'attelaient à des équations de la forme $x^3 + px + q = 0$. Ce sont ces études qui les ont mené à la découverte et l'introduction des nombres complexes.

Afin de comprendre, l'origine des nombres complexes, revenons à une équation algébrique que nous connaissons :

$$x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 - (\sqrt{2})^2 = 0 \iff (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$$

Cette équation pas très originale mène aux solutions suivantes.

$$x = -\sqrt{2} \text{ ou } \sqrt{2}$$

Une dose de transgression mathématique :

Essayons d'ouvrir de nouveaux horizons. L'audace est souvent à l'origine de belles découvertes. On vous a toujours dit que $x^2 + 1 = 0$ ne peut avoir de solutions réelles puisque $x^2 + 1$ est supérieur à 1. Calquons cependant la résolution ci-dessus sur cette équation :

$$x^2 + 1 = 0 \iff x^2 - (-1) = 0 \iff x^2 - (\sqrt{-1})^2 = 0 \iff (x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}) = 0$$

ce qui donnerait,

$$x = -\sqrt{-1} \text{ ou } \sqrt{-1}$$

A priori ce raisonnement est choquant dans la mesure où on se permet d'écrire le nombre $\sqrt{-1}$. Normalement, on ne peut prendre la racine carrée que d'un nombre positif. En d'autres mots, le carré d'aucun nombre réel ne peut valoir -1. On aurait pu en rester à cette contradiction apparente sans les travaux de del Ferro, Tartaglia et Cardan sur les équations algébriques d'ordre 3. Ces mathématiciens parvinrent à trouver une solution de $x^3 + px + q = 0$ sous la forme suivante

$$x = \sqrt[3]{\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{-q - \sqrt{q^2 + 4(\frac{p}{3})^3}}{2}}.$$

Rien de surprenant a priori sauf que pour l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, on obtient la solution suivante.

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

A nouveau, notre instinct nous dirait que cette solution est fausse puisqu'elle contient la racine carré d'un nombre négatif.

Un dénouement étonnant :

Sauf que, si on calcule $(2 + \sqrt{-1})^3$:

$$(2+\sqrt{-1})^3 = 8+3\times4\times\sqrt{-1}+3\times2\times\sqrt{-1}^2+(\sqrt{-1})^3 = 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1} = 2+11\sqrt{-1} = 2+\sqrt{121}\sqrt{-1} = 2+\sqrt{-121}$$

Autrement dit $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$ et de même $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$.
En rassemblant cela, on a

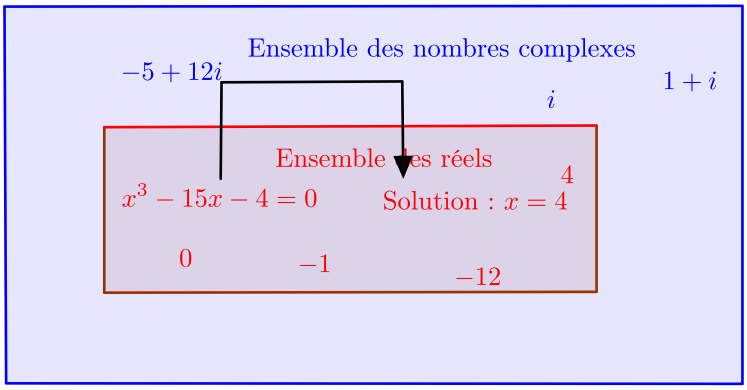
$$x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$$

et 4 est bien solution puisque

$$4^3 - 15 \times 4 - 4 = 64 - 60 - 4 = 0!$$

Bien comprendre ce qu'il s'est passé :

Résumons : on est parti d'une équation bien réelle, on a trouvé une **vraie solution réelle** tout en cela en faisant des calculs manipulant un nombre "a priori illégal". C'est là où il faut ouvrir son esprit. Certes ce nombre n'est pas réel puisqu'aucun réel n'a pour carré -1, mais il faut bien admettre que le calcul marche ! Là où la raison pousserait à rejeter ce type de calcul, le mathématicien définit un nouveau nombre qu'il appelle i qui n'est pas réel. Ce nombre ajouté à l'ensemble des réels permet de construire les nombres complexes.



Comme on peut le voir sur le schéma, pour trouver une solution réelle à une équation algébrique réelle, on fait un détour par l'ensemble des nombres complexes !

5.3 Forme algébrique d'un complexe

5.3.1 Définition

Depuis votre plus tendre enfance, vous faites des calculs sur les réels (addition, soustraction multiplication, division). A partir d'aujourd'hui, nous introduisons **un seul** nouveau nombre.

Définition 3: Nombre i

On définit le nombre i comme le nombre dont le carré vaut -1. Autrement dit $i^2=-1$.

Avec ce nombre, nous nous autorisons à effectuer des calculs (addition, soustraction multiplication, division) en utilisant les mêmes règles que sur $\mathbb{R}$ et nous cherchons à définir tous les nombres qui pourraient être issus de ces calculs.

Questions :

- Calculer i^2, $3+i-(2\times i-4)$ et $(3+i)(4-2i)$.

- $i^2=-1$.
- $3+i-(2\times i-4)=3+i-2i+4=7-i$.
- $(3+i)(4-2i)=12-6i+4i-2i^2=14-2i$.

On peut remarquer que tous ces calculs aboutissent à la forme générique suivante : $a+ib$ où a,b sont deux réels. Cette forme sera appelé forme algébrique d'un nombre complexe.

Définition 4: Nombre complexe

- On appelle un nombre complexe un nombre de la forme $z=a+ib$ où a,b sont deux réels.
- Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $Re(z)$. Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $Im(z)$.
- On appelle forme algébrique du complexe z la forme $z=a+ib$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$. On a $\mathbb{C}=\{a+ib|a\in\mathbb{R},b\in\mathbb{R}\}$.
- On dit qu'un complexe est imaginaire pur si sa partie réelle est nulle : $z=ib$ pour $b\in\mathbb{R}$.

Remarque 8: Les nombres réels sont complexes !

Tout nombre réel x peut s'écrire $x=x+0\times i$ et donc est un nombre complexe. En termes ensemblistes, cela signifie que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Questions :

- Parmi ces nombres complexes, déterminer leurs parties réelles et imaginaires. Lesquels sont réels ? imaginaires purs ?

$$i^2, i^3, (2-i)(5-i).$$

- $i^2 = -1$ est réel.
- $i^3 = i \times i^2 = -i$ est imaginaire pur.
- $(2-i)(5-i) = 10 - 2i - 5i + i^2 = 9 - 7i$ n'est ni réel, ni imaginaire pur.

Proposition 9: Unicité des parties réelles et imaginaires

Soient $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$ deux nombres complexes. Si $z_1 = z_2$ alors leurs parties réelles et imaginaires sont égales :

$$\begin{cases} a_1 &= a_2 \\ b_1 &= b_2 \end{cases}$$

Preuve à faire par tous :

Dans cette preuve expliquez, chacun des points numérotés :

Supposons que $z_1 = z_2$ c'est-à-dire que $a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2$.
$\underset{(1)}{Alors}$ $a_1 - a_2 = i(b_2 - b_1)$.
Si b_2 était différent de b_1, $\underset{(2)}{alors}$ $\dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1} = i$. $\underset{(3)}{Donc}$ i est un nombre réel ce qui est absurde.
Donc $b_2 = b_1$ et $\underset{(4)}{donc}$ $a_1 = a_2$.

(1) : On soustrait des deux côtés $a_2 + ib_1$ et on factorise par i dans le terme de droite.
(2) : on divise les deux côtés par $b_2 - b_1$ car $b_2 - b_1 \neq 0$.
(3) : $\dfrac{a_1 - a_2}{b_2 - b_1}$ est un réel comme quotient de deux réels.
(4) : on a vu que $a_1 - a_2 = i(b_2 - b_1)$ donc $a_1 - a_2 = 0$.

Questions :

- Donnez deux nombres complexes différents ayant même partie réelle, un nombre complexe à partie imaginaire nulle et un nombre complexe à partie réelle nulle.

$1 + i$ et $1 + 2i$ ont pour partie réelle 1. Le réel 1 a pour partie imaginaire 0 et i a pour partie réelle 0.

5.3.2 Représentation géométrique et affixe

Dans cette partie, nous cherchons à avoir une vision graphique des nombres complexes. Pour cela la première chose à remarquer et qu'un nombre complexe $z = a + ib$ est caractérisé par sa partie réelle a et sa partie imaginaire b. Il a donc en quelque sorte "deux coordonnées". Pour cette raison, on adopte la même représentation graphique que celle utilisée pour les vecteurs à deux coordonnées.

Définition 5: Affixe

Soit $M = (a, b)$ un point de $\mathbb{R}^2$, on appelle affixe de M le nombre complexe $z = a + ib$.

La représentation graphique qui en découle est la suivante : en abscisse, on place la partie réelle et en ordonnée la partie imaginaire. Pour voir comment faire en pratique, regardez la vidéo suivante :

Remarque 9: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 1189 Savoir placer un point dans C.*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Placer les 6 premiers points de l'exercice 18 dans le plan complexe.

5.3.3 Opérations algébriques sur les complexes

Cette section concrétise les calculs sur les complexes faits auparavant. Elle a pour but de montrer que sommer, soustraire, multiplier, diviser des complexes donne comme résultat un nombre complexe. Cette stabilité n'est pas quelque chose de garanti comme le montrent l'exemple suivant :

- Si on divise ou soustrait deux entiers naturels (deux éléments de $\mathbb{N}$), on ne reste pas forcément dans $\mathbb{N}$: $2 \in \mathbb{N}, 3 \in \mathbb{N}$ mais $\frac{2}{3} \notin \mathbb{N}$ et $2 - 3 = -1 \notin \mathbb{N}$.

Somme/différence

Proposition 10: Somme/différence

Soient $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$, alors $z + z' \in \mathbb{C}$ et $z - z' \in \mathbb{C}$.

Preuve :

- Ecrivez les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrivez le but et traduisez-le.
- Démontrez alors la proposition.

- **Hypothèses :** $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe des réels a, b, a', b' tels que $z = a + ib, z' = a' + ib'$.
- **But :** $z + z' \in \mathbb{C}$ et $z - z' \in \mathbb{C}$.
- **Traduction :** il existe des réels $\alpha, \beta, \alpha', \beta'$ tels que $z + z' = \alpha + i\beta$ et $z - z' = \alpha' + i\beta'$

Or $z + z' = a + ib + a' + ib' = (a + a') + i(b + b')$ et $z - z' = (a + ib) - (a' + ib') = a + ib - a' - ib' = (a - a') + i(b - b')$. donc $\alpha = a + a', \beta = b + b', \alpha' = a - a', \beta' = b - b'$, qui sont bien des réels, conviennent.

Donc $z + z' \in \mathbb{C}$ et $z - z' \in \mathbb{C}$.

Produit

Proposition 11: Produit

Soient $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$, alors $zz' \in \mathbb{C}$

Preuve à faire par tous :

- Ecrivez les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrivez le but et traduisez-le.

- Démontrez alors la proposition.

- **Hypothèses :** $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe des réels a, b, a', b' tels que $z = a + ib, z' = a' + ib'$.
- **But :** $zz' \in \mathbb{C}$.
- **Traduction :** il existe des réels α, β tels que $zz' = \alpha + i\beta$.

Or

$$\begin{aligned} zz' &= (a+ib)(a'+ib') \\ &= aa' + iab' + iba' + i^2bb' && \text{en développant} \\ &= aa' - bb' + i(ab' + ba') && \text{car } i^2 = -1 \text{ et en factorisant par } i \end{aligned}$$

donc $\alpha = aa' - bb'$, $\beta = ab' + ba'$, qui sont bien des réels, conviennent.

Donc $zz' \in \mathbb{C}$.

Il est temps pour vous de passer à la pratique : votre objectif est de savoir additionner soustraire et multiplier des complexes à la fin de cette partie. Pour cela regardez la vidéo suivante :

Remarque 10: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 77 Savoir manipuler la forme algébrique d'un nombre complexe.*

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Faire deux questions dans l'exercice 19 page 49.

Conjugué d'un complexe

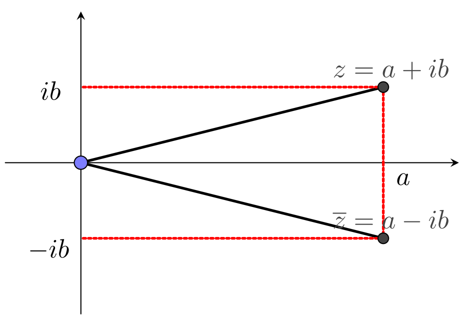
Définition 6: Complexe conjugué

Soit un nombre complexe $z = a + ib$. On appelle conjugué de z et on note $\overline{z}$ le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Remarque 11: Conjugué du conjugué

Etant donné un complexe z, $\overline{\overline{z}} = z$.

Pour tracer le conjugué d'un nombre complexe, il s'agit d'en faire le symétrique par rapport à l'axe des abscisses.



Que vaut le conjugué d'un nombre réel ? d'un imaginaire pur ?

On constate que si z est sur l'axe des réels alors il est égal à son conjugué puisque cela revient sur le dessin à choisir $b = 0$. Si z est imaginaire pur alors son conjugué est $-z$ puisque cela revient à choisir $a = 0$ sur le dessin précédent. Ceci est retranscrit par la proposition suivante.

Proposition 12:

Soit $z \in \mathbb{C}$,

- z est réel si et seulement si $z = \overline{z}$.
- z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\overline{z}$.

Preuve :

Dans cette preuve expliquez chacun des points numérotés :

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$

- $z = \overline{z} \underset{(1)}{\iff} a + ib = a - ib \underset{(2)}{\iff} 2ib = 0 \underset{(3)}{\iff} b = 0 \underset{(4)}{\iff}$ z est réel.
- $z = -\overline{z} \underset{(5)}{\iff} a + ib = -(a - ib) \underset{(6)}{\iff} 2a = 0 \underset{(7)}{\iff} a = 0 \underset{(8)}{\iff}$ z est imaginaire pur.

(1) : on remplace simplement z et $\overline{z}$
(2) : on ajoute des deux côtés $-a + ib$.
(3) : on divise des deux côtés par $2i$
(4) : $z = a + ib = a$ est réel puisque a est réel
(5) : on remplace simplement z et $\overline{z}$
(6) : on ajoute des deux côtés $a - ib$.
(7) : on divise des deux côtés par 2
(8) : $z = a + ib = ib$ est imaginaire pur.

La proposition suivante recense quelques formules importantes sur le conjugué :

Proposition 13:

Soit $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}$, alors

- $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.
- $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.

Preuve :

- Ecrivez les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrivez le but et traduisez-le.
- Démontrez alors la proposition.

Première propriété :

- **Hypothèses :** $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe des réels a_1, b_1, a_2, b_2 tels que $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$.
- **But :** $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
- **Traduction :** $\overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} = \overline{a_1 + ib_1} + \overline{a_2 + ib_2}$.

Or

$$\begin{array}{rll} \overline{a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2} & = \overline{a_1 + a_2 + i(b_1 + ib_2)} & \text{en factorisant par } i \\ & = a_1 + a_2 - i(b_1 + ib_2) & \text{par définition du conjugué} \\ & = a_1 - ib_1 + a_2 - ib_2 & \text{en développant} \\ & = \overline{a_1 + ib_1} + \overline{a_2 + ib_2} & \text{par définition du conjugué} \end{array}$$

.

Donc $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

Troisième propriété :

- **Hypothèses :** $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe des réels a_1, b_1, a_2, b_2 tels que $z_1 = a_1 + ib_1, z_2 = a_2 + ib_2$.
- **But :** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$.
- **Traduction :** $\overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} = \overline{a_1 + ib_1 a_2 + ib_2}$.

Or

$$\begin{array}{rll} \overline{(a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2)} & = \overline{a_1 a_2 + ib_1 a_2 + ia_1 b_2 + i^2 b_1 b_2)} & \text{en développant} \\ & = \overline{a_1 a_2 - b_1 b_2 + i(b_1 a_2 + a_1 b_2)} & \text{car } i^2 = -1 \text{ et en factorisant par } i \\ & = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(b_1 a_2 + a_1 b_2) & \text{par définition du conjugué} \end{array}$$

.

Par ailleurs,

$$\begin{array}{rll} (\overline{a_1 + ib_1})(\overline{a_2 + ib_2}) & = (a_1 - ib_1)(a_2 - ib_2) & \text{par définition du conjugué} \\ & = a_1 a_2 - ib_1 a_2 - ia_1 b_2 + i^2 (b_1 b_2) & \text{en développant} \\ & = a_1 a_2 - b_1 b_2 - i(b_1 a_2 + a_1 b_2) & \text{car } i^2 = -1 \text{ et en factorisant par } i \end{array}$$

.

Donc $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$.

Continuons à faire des liens entre un complexe et son conjugué. La proposition qui suit est importante car elle va nous permettre de faire des divisions de complexes. Elle permet notamment d'assurer qu'un quotient de complexes reste un complexe.

Proposition 14:

Soit $z \in \mathbb{C}$, alors $z\overline{z}$ est réel.

Preuve :

- Ecrivez les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrivez le but et traduisez-le.
- Démontrez alors la proposition.

Première propriété :

- **Hypothèses :** $z \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe des réels a, b tels que $z = a + ib$.
- **But :** $z\overline{z}$ est réel.
- **Traduction :** il existe α réel tel que $(a + ib)\overline{(a + ib)} = \alpha$.

Or

$$\begin{array}{rll} (a + ib)\overline{(a + ib)} & = (a + ib)(a - ib) & \text{par définition du conjugué} \\ & = a^2 + iba - iab - i^2 b^2 & \text{en développant} \\ & = a^2 + b^2 & \text{car } i^2 = -1 \end{array}$$

.

Or $a^2 + b^2$ est réel puisque a, b le sont.
Donc $z\overline{z}$ est réel.

Remarque 12:

$z\overline{z}$ est ce qu'on va appeler le module au carré.

Questions :

- Placez dans le plan complexe, les complexes qui sont égaux à leur conjugué, puis ceux dont la somme avec leur conjugué vaut 0.

Cette question est une redite de la proposition 12. Les complexes égaux à leur conjugué sont sur l'axe des réels. Ceux dont la somme avec leur conjugué vaut 0 sont sur l'axe des imaginaires purs.

Quotient

Proposition 15: Quotient

Soient $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C} - \{0\}$, alors $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{C}$.

Preuve à faire par tous :

Multiplication par le complexe conjugué. Soient $z = a + ib \in \mathbb{C}, z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$. En multipliant par $\dfrac{a' - ib'}{a' - ib'}$ le quotient $\dfrac{z}{z'}$ démontrer que $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{C}$. Pour cela n'oubliez pas avant d'écrire le but et de le traduire.

Première propriété :

- **Hypothèses :** $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C} - \{0\}$
- **Traduction :** il existe des réels a, b et a', b' avec $a' \neq 0$ ou $b' \neq 0$ tels que $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.
- **But :** $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{C}$
- **Traduction :** il existe α, β réels tel que $\dfrac{z}{z'} = \alpha + i\beta$.

Or

$$\begin{aligned}
\frac{z}{z'} &= \frac{a+ib}{a'+ib'} && \text{en remplaçant} \\
&= \frac{a+ib}{a'+ib'} \frac{a'-ib'}{a'-ib'} \times && \text{car } \frac{a'-ib'}{a'-ib'} = 1 \\
&= \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a'+ib')(a'-ib')} && \text{axiome du produit de fractions} \\
&= \frac{(a+ib)(a'-ib')}{(a')^2 + (b')^2} && \text{d'après la proposition 14} \\
&= \frac{aa' + bb' + i(ba' - ab')}{(a')^2 + (b')^2} && \text{en développant puis factorisant par} i \\
&= \frac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2} + i \frac{ba' - ab'}{(a')^2 + (b')^2} && \text{axiome de somme de fractions}
\end{aligned}$$

.

Donc $\alpha = \dfrac{aa' + bb'}{(a')^2 + (b')^2}$ et $\beta = \dfrac{ba' - ab'}{(a')^2 + (b')^2}$ qui sont des réels conviennent.

Donc $\dfrac{z}{z'} \in \mathbb{C}$.

Et en pratique comment calcule-t-on un quotient de complexes ?

On fait exactement ce que vous venez de faire dans la preuve ! Pour un exemple de calcul, regardez la vidéo suivante :

Remarque 13: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF78 Savoir simplifier une fraction complexe à l'aide du complexe conjugué du dénominateur* .

Questions :

Faire les questions a,b,c de l'exercice 21 page 50.

On peut montrer que le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués.

Proposition 16:

Soient $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$, alors

- $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Dans cette preuve expliquez chacun des points numérotés :

Soient $z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C} - \{0\}$,

Alors $\frac{z_1}{z_2} \underset{(1)}{=} \frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}$.

Donc $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} \underset{(2)}{=} \overline{\frac{1}{z_2\overline{z_2}}}\,\overline{z_1\overline{z_2}} \underset{(3)}{=} \frac{1}{z_2\overline{z_2}}\overline{z_1}z_2 \underset{(4)}{=} \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

(1) : on multiplie par $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = 1$.

(2) : proposition 13 : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

(3) : proposition 14 : $z_2\overline{z_2}$ est réel donc $\frac{1}{z_2\overline{z_2}}$ est égal à son conjugué (proposition 12). On utilise aussi la proposition 13 : $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$ et la remarque 11.

(4) : on simplifie par z_2.

Questions :

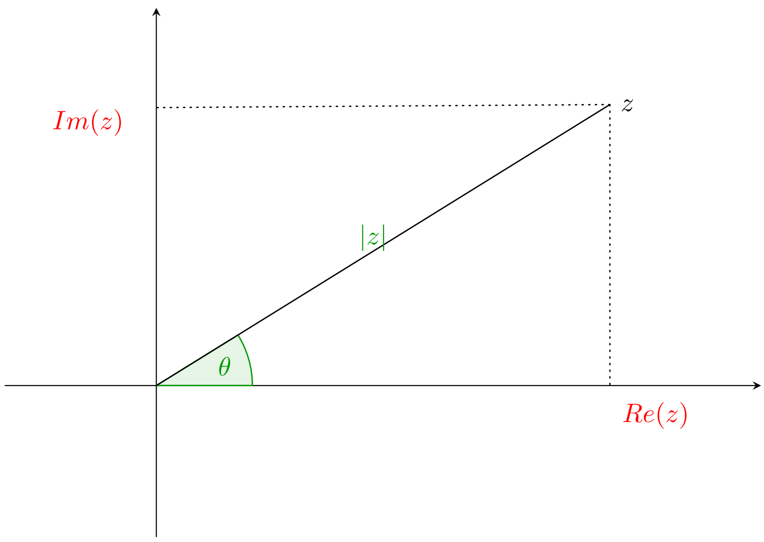
- Expliquez pourquoi multiplier par le conjugué du dénominateur permet de faire disparaître le i au dénominateur.

  Multiplier par le conjugué fait disparaître le i car $z\overline{z} = |z|^2$ est un réel.

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.4 Forme exponentielle d'un complexe

Nous avons vu que pour caractériser un complexe z, il suffit de connaître sa partie réelle $Re(z)$ et sa partie imaginaire $Im(z)$. Dans cette partie, nous montrons qu'il existe une autre façon de le caractériser à l'aide de la distance qu'il a avec l'origine et l'angle qu'il forme avec l'axe des abscisses. Cette distance est ce qu'on va appeler le module est notée $|z|$ et l'angle sera appelé argument de z : θ sur le dessin.



Comment donc définir la distance à l'origine ?

5.4.1 Module d'un complexe

Définition et géométrie

Graphiquement, le module désigne la distance de z à l'origine du repère. C'est une mesure de la taille d'un nombre complexe. Cette mesure correspond en fait à quelque chose que vous avez déjà vu : la norme euclidienne d'un vecteur de $\mathbb{R}^2$.

Définition 7: Module d'un complexe

On appelle module d'un nombre complexe $z = a + ib$ la quantité $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.

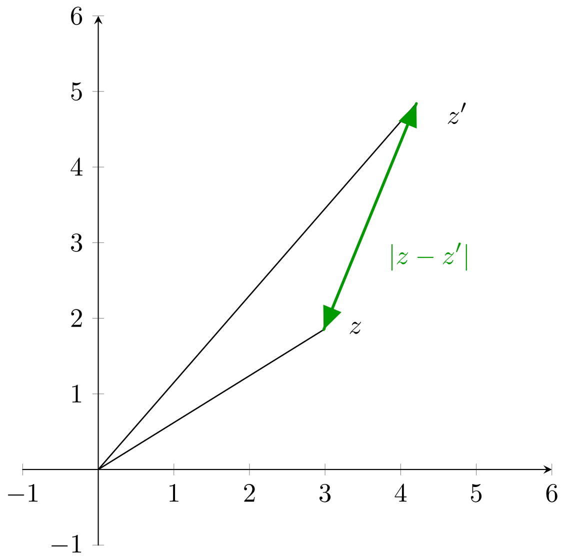
Exemple 1:

Le module de $z = 5 + 4i$ est $|z| = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41}$.

Remarque 14:

C'est exactement la norme euclidienne d'un vecteur (a, b) qui vaut $\sqrt{a^2 + b^2}$!

Comme nous l'avons dit précédemment, le module est un outil de mesure de distance : si on place deux points M et M' d'affixe z et z' alors $|z - z'|$ est la distance de M à M' :



Proposition 17: Distance entre deux points

Soient M et M' d'affixe z et z' alors $|z - z'|$ est la distance de M à M'.

Preuve :

Faites la preuve en posant $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$.

$$
\begin{aligned}
|z - z'| &= |a - a' + i(b - b')| && \text{développement et factorisation par } i \\
&= \sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2} && \text{par définition du module}
\end{aligned}
$$

Ceci est la distance de $M = (a, b)$ à $M' = (a', b')$.

Questions :

- Dessinez dans le plan complexe, l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 2.

S'ils sont de module inférieur ou égal à 2, cela veut dire qu'ils sont à distance au plus 2 de l'origine. Il s'agit donc des complexes situés à l'intérieur ou au bord du disque centré en 0 et de rayon 2.

Propriétés algébriques

La proposition suivante est très utile en termes calculatoires. Quand vous devrez calculer le module d'un produit ou d'un quotient, il suffit de calculer les modules de chaque terme du produit ou du quotient et de les multiplier ou diviser.

Proposition 18:

Soient $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$, alors

- $|zz'| = |z||z'|$.
- $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Dans cette preuve expliquez chacun des points numérotés :

Soient $z \in \mathbb{C}, z' \in \mathbb{C}$,

$$|zz'| \underset{(1)}{=} \sqrt{zz'\overline{zz'}} \underset{(2)}{=} \sqrt{zz'\overline{z}\overline{z'}} \underset{(3)}{=} \sqrt{z\overline{z}}\sqrt{z'\overline{z'}} \underset{(4)}{=} |z||z'|.$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| \underset{(5)}{=} \sqrt{\frac{z}{z'}\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}} \underset{(6)}{=} \sqrt{\frac{z}{z'}\frac{\overline{z}}{\overline{z'}}} \underset{(7)}{=} \frac{\sqrt{z\overline{z}}}{\sqrt{z'\overline{z'}}} \underset{(8)}{=} \frac{|z|}{|z'|}.$$

(1) : par définition du module.
(2) : proposition 13 : troisième propriété.
(3) : pour a, b positifs, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.
(4) : par définition du module.
(5) : par définition du module.
(6) : proposition 16.
(7) : pour a, b positifs, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.
(8) : par définition du module.

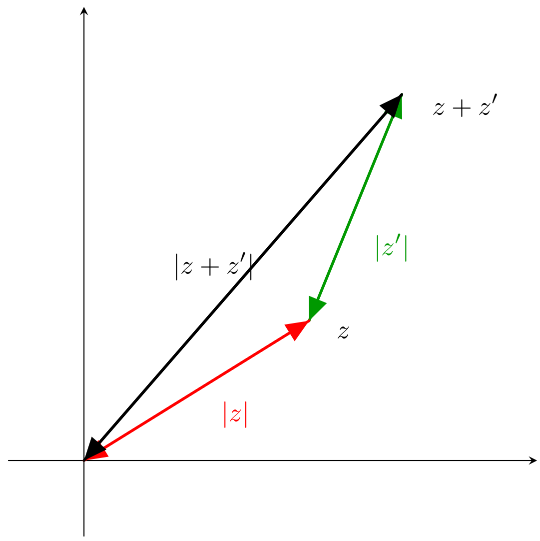
Exemple 2: En pratique

Pour calculer le module de $\dfrac{1+i}{1-i}$, une solution pourrait être de le mettre sous forme algébrique afin d'ensuite calculer le module. Cependant la proposition qui précède assure que

$$\left|\frac{1+i}{1-i}\right| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}},$$

ce qui permet d'être plus économe en calculs.

Nous avons vu que le module d'un produit (resp quotient) est égal au produit (resp quotient) des modules. En revanche, le module d'une addition n'est pas égale à l'addition des modules. On peut le voir sur le dessin L'inégalité qui suit traduit le fait que tout côté d'un triangle est plus petit que la somme des deux autres côtés.



Proposition 19: Inégalité triangulaire

Soient z et z' deux complexes alors $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Dans cette preuve expliquez chacun des points numérotés :

Soient z et z' deux complexes.
On cherche à montrer que $|z+z'|^2 \leq (|z|+|z'|)^2$ car $\underset{(1)}{alors}$ on aura $|z+z'| \leq |z|+|z'|$.

Or

$$\begin{aligned}
|z+z'|^2-(|z|+|z'|)^2 &\underset{(2)}{=} (z+z')\overline{(z+z')}-|z|^2-|z'|^2-2|z||z'| \\
&\underset{(3)}{=} z\overline{z}+z\overline{z'}+z'\overline{z}+z'\overline{z'}-|z|^2-|z'|^2-2|z||z'| \\
&\underset{(4)}{=} z'\overline{z}+z\overline{z'}-2|z||z'| \\
&\underset{(5)}{=} 2Re(z\overline{z'})-2|z||\overline{z'}| \\
&\underset{(6)}{=} 2Re(z\overline{z'})-2|z\overline{z'}| \\
&\underset{(7)}{\leq} 0.
\end{aligned}$$

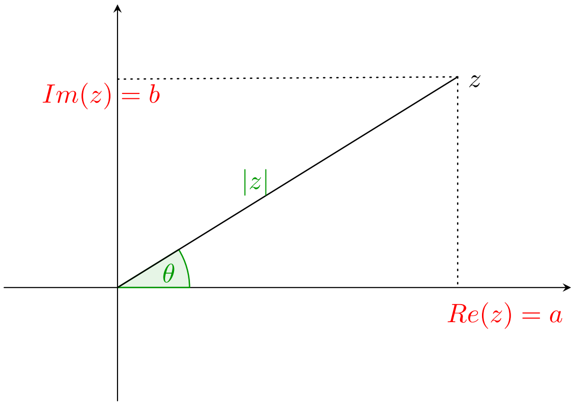
(1) : la fonction $\sqrt{\cdot}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
(2) : par définition du module pour le premier terme et par développement du second terme.
(3) : par la proposition 13 : première propriété et par développement.
(4) : on peut simplifier grâce à la définition du module.
(5) : en posant $Z = z\overline{z'}$ c'est $Z+\overline{Z} = 2Re(Z)$.
(6) : proposition 18 première propriété.
(7) : pour $z = a+ib \in \mathbb{C}$, $Re(z) = a \leq \sqrt{a^2+b^2} = |z|$.

Questions :

- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.4.2 Argument d'un complexe

Graphiquement, un argument est l'angle que fait le complexe $z = a+ib$ avec l'axe des abscisses. (θ sur le dessin ci-dessous).



Définition 8: Argument

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe non nul. On appelle argument de z un réel θ tel que

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{b}{|z|} \end{cases}$$

Exemple 3:

Déterminons un argument de $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Le module vaut 1. Ainsi on a

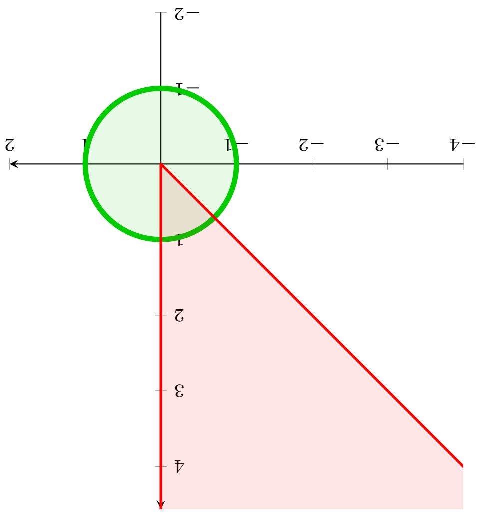
$$\begin{cases} \cos(\theta) & = & \dfrac{1}{2} \\ \sin(\theta) & = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Un argument est $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. Notez qu'il y a une infinité d'arguments possibles : tous les $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$ sont des arguments de z.

Questions :

- Dessinez l'ensemble des nombres complexes d'argument compris entre $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$. Parmi ces complexes, dessinez ceux dont le module est plus grand que 1.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/théorèmes de la partie.

L'ensemble des nombres complexes d'argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$ est la partie rouge. Parmi ces complexes, ceux dont le module est plus grand que 1 est la partie rouge à laquelle on a enlevé la partie verte.



5.4.3 Formes trigonométique et exponentielle

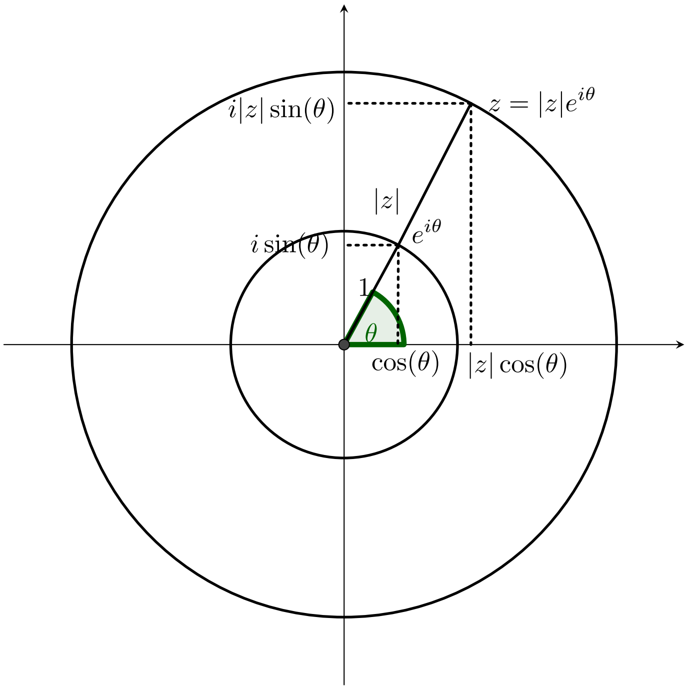
Maintenant que module et argument sont définis, nous allons pouvoir définir la forme trigonométrique/exponentielle d'un complexe.

Pour comprendre quelle va être cette forme, commençons par la deviner géométriquement. Vous avez vu que tout point du cercle trigonométrique a pour abscisse $\cos(\theta)$ et pour ordonnée $\sin(\theta)$ pour θ un angle donné. La forme complexe d'un tel point est donc $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi tout complexe qui se situe sur le cercle de rayon 1 s'écrit $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Prenons maintenant un complexe situé à distance $|z|$ de l'origine. Comme on peut le voir sur le dessin, ce complexe peut alors être vu comme un multiple d'un complexe situé sur le cercle trigonométrique. Ainsi ce complexe va pouvoir s'écrire sous la forme

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta)).$$

Ceci nous pousse à introduire la définition.



Définition 9: Exponentielle complexe

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on définit $e^{i\theta}$ par l'expression

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta).$$

Questions :

- Quel est le module de $e^{i\theta}$ pour θ réel ?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)} = \sqrt{1} = 1$.

Remarque 15:

Attention cet objet est une exponentielle évaluée en un nombre complexe, ce qui est nouveau. Vous verrez plus tard que cet objet et l'exponentielle sur $\mathbb{R}$ sont deux cas particuliers de la fonction *exponentielle complexe*.

Avant de passer à la forme exponentielle, on vérifie que cette nouvelle exponentielle vérifie des propriétés similaires à celles qu'elle vérifie sur $\mathbb{R}$.

Proposition 20:

Soient θ, θ' deux réels et $n \in \mathbb{N}$ alors

- $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
- $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.
- $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

Preuve pour ceux qui veulent aller plus loin:

Pour les deux premiers points de la proposition

- Ecrivez les hypothèses et traduisez-les.
- Ecrivez le but et traduisez-le.
- Démontrez alors la proposition.

Cette partie s'adresse à ceux qui connaissent le principe de récurrence.
Pour le troisième point, voici la preuve par récurrence : expliquez-en chacun des points numérotés.

Initialisation : Pour $n = 1$, c'est évident.
Hérédité : Supposons qu'au rang $n \in \mathbb{N}^\star$, $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ et montrons que $e^{i(n+1)\theta} = (e^{i\theta})^{n+1}$.
Or $e^{i(n+1)\theta} \underset{(1)}{=} e^{in\theta}e^{i\theta} \underset{(2)}{=} (e^{i\theta})^n(e^{i\theta}) \underset{(3)}{=} (e^{i\theta})^{n+1}$.

Troisième propriété
(1) : c'est la première propriété qu'on vient de démontrer.
(2) : par hypothèse de récurrence.
(3) : axiome sur les puissances.

D'après la première propriété qu'on vient de démontrer, pour $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{-i\theta}e^{i\theta} = e^{i0} = 1$. Donc en divisant par $e^{i\theta}$, on obtient la propriété demandée.

- **Traduction :** on pourrait le traduire avec cos, sin mais mieux vaut utiliser ce qu'on vient de montrer
- **But :** $e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$
- **Traduction :** idem
- **Hypothèses :** θ, θ' deux réels et $n \in \mathbb{N}$

Deuxième propriété

Donc $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.

$$\begin{aligned}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta')) &= \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta') + i(\cos(\theta')\sin(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta')) \\ &\quad \text{en développant puis factorisant par } i \\ &= \cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') \\ &\quad \text{d'après les formules trigos}\end{aligned}$$

Soient θ, θ' deux réels,

- **Traduction :** $\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta') = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta') + i\sin(\theta'))$.
- **But :** $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$.
- **Traduction :** idem.
- **Hypothèses :** θ, θ' deux réels

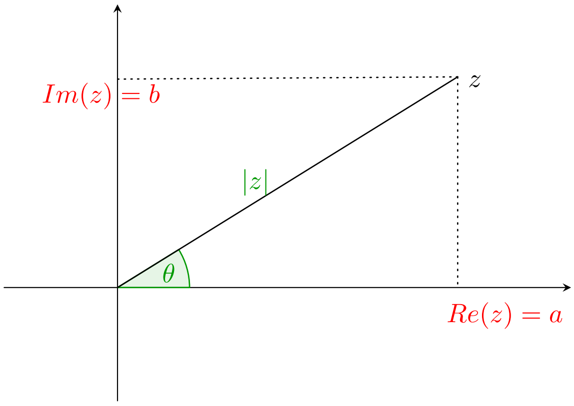
Première propriété

Proposition 21: Forme exponentielle/trigonométrique d'un complexe

Tout nombre complexe z peut s'écrire sous la forme $z = |z|e^{i\theta} = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ pour θ un argument de z.

Preuve à faire par tous :

Voici la représentation graphique d'un complexe $z = a + ib$.



- En utilisant la trigonométrie dans un triangle rectangle, exprimer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- En déduire que $z = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta)$. Conclure.

Le complexe z vaut $a + ib$.

$\cos(\theta) = \frac{adjacent}{hypotenuse} = \frac{a}{|z|}$, $\sin(\theta) = \frac{oppos}{hypotenuse} = \frac{b}{|z|}$.

Donc $a = |z|\cos(\theta)$ et $b = |z|\sin(\theta)$.

Donc $z = a + ib = |z|\cos(\theta) + i|z|\sin(\theta) = |z|e^{i\theta}$.

Comment met-on un complexe sous forme exponentielle en pratique ?

Remarque 16: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux vidéos : *SF79 Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle (1) et (2) et SF80 Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle.*

Questions :

- Expliquez graphiquement les deux façons (algébrique et exponentielle) de caractériser un nombre complexe.
- Faire l'exercice 26 (page 51 et les questions b et g de l'exercice 158 (page 50).
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.4.4 Formules issues de l'exponentielle complexe

L'exponentielle complexe donne lieu à des identités qui vous seront très utiles dans la suite de votre cursus et notamment en physique.

Formules d'Euler

Proposition 22: Formules d'Euler

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, alors
$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Preuve à faire par tous :

Soit $\theta \in \mathbb{R}$,

- Exprimer $e^{i\theta}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- Exprimer $e^{-i\theta}$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.
- En déduire la proposition.

- $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
- $e^{-i\theta} = \cos(-\theta) + i\sin(-\theta) = \cos(\theta) - i\sin(\theta)$. car cos est paire et sin est impaire.

Donc

$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$$

et

$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\sin(\theta)$$

ce qui donne les deux égalités en divisant respectivement par 2 et par $2i$.

Remarque 17: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF82 Connaître les formules d'Euler.*

Formules de Moivre et linéarisation

Proposition 23: Formules de Moivre

Soient $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}, (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$.

Preuve :

Il s'agit simplement d'une réécriture de l'identité : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

Cette identité est notamment utile lorsqu'on veut en physique calculer $\int_0^1 \cos(\theta)^2 d\theta$. Pour cela l'idée est d'exprimer $\cos(\theta)^2$ en fonction de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ dont une primitive est facile à calculer. On parle de linéarisation. Cela correspond au *SF83 : Utiliser les formules d'Euler pour linéariser ou simplifier des expressions trigonométriques.* L'exercice 36 traite de ce sujet.

Questions :

- Faire l'exercice 36 page 53.

Technique de l'angle moitié

Cette technique permet de simplifier des additions d'exponentielles complexes. Elle correspond au *SF213 : Savoir utiliser la technique de l'angle moitié pour simplifier une expression.*

Questions :

- Regarder la correction de la première question de l'exercice 37 page 54 puis faire la seconde question.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.5 Equations algébriques complexes

Comme sur $\mathbb{R}$, on peut résoudre des équations portant sur les complexes. Nous nous intéressons ici aux équations polynomiales d'ordre 1 et 2 qui seront traitées grâce aux exos du td.

5.5.1 Ordre 1

Ces équations sont des équations de la forme $az + b = cz + d$ ou $az + b = c\bar{z} + d$ où a, b, c, d sont des complexes. Leur résolution utilise le *SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires.*

Questions :

- Faites les questions 1 et 5 de l'exercice 34 page 53.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

5.5.2 Ordre 2

L'objectif de cette section est de résoudre des équations de la forme $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des complexes. Afin d'atteindre cet objectif, on passe par une étape intermédiaire. On commence par résoudre $z^2 = z_0$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$ qui est un cas particulier de notre objectif.

Racine carrée

Il s'agit de trouver les complexes z tels que $z^2 = z_0$ pour $z_0 \in \mathbb{C}$. Nous vous invitons pour cela à regarder une vidéo qui présente trois exemples de telles résolutions.

Remarque 18: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF81 Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes (1)* .

Questions :

- Faire la question 3 de l'exercice 32 page 52.

Trinôme complexe à coefficients réels

On s'attache dans cette section à résoudre $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des réels. On veut donc trouver tous les z vérifiant cette équation. En réalité, vous savez presque tout sur ces équations puisque vous les résolvez sur $\mathbb{R}$ depuis le lycée. Trois cas sont possibles :

- soit le discriminant Δ est strictement positif alors il y a deux racines réelles distinctes (voir cours AAV1).
- soit le discriminant Δ est nul alors il y a une racine double réelle (voir cours AAV1).
- soit le discriminant est strictement négatif et usuellement vous dites qu'il n'y a pas de racines réelles. On va ici compléter le calcul en ajoutant le fait qu'il y a deux racines complexes conjuguées distinctes.

En vérité, il n'y a pas de quoi avoir peur, les formules des racines sont toujours les mêmes :

$$\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

La seule question est : qu'est-ce que $\sqrt{\Delta}$ si $\Delta < 0$?

Exemple 4:

Résolvons $z^2 + z + 1 = 0$.
$\Delta = -3 < 0$.
Il suffit alors de mettre Δ sous forme de carré : $\Delta = 3i^2 = (i\sqrt{3})^2$.
Les deux racines de l'équation sont donc $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$.

Questions :

- Faire la question 1 de l'exercice 35 page 53.

Trinôme complexe à coefficients complexes

On s'attache dans cette section à résoudre $az^2 + bz + c = 0$ où a, b, c sont des complexes.

Remarque 19: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF81 Savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes (2).*

Questions :

- Quand on résout une équation d'ordre 1, à combien de solutions s'attend-on ? Et pour une équation d'ordre 2 ?

  Pour une équation d'ordre 1, il y a une solution, pour l'ordre 2, deux solutions.
- Faire la question 4 de l'exercice 32 page 52.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices du chapitre 5

5.1 Travailler les savoir-faire

Dans cette section, vous trouverez les exercices d'entraînement sur les savoir-faire spécifiques.

Exercice 11 *Valeurs des fonctions trigo*

Savoir faire

- SF46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.1 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Complétez le tableau suivant :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(x)$						
$\cos(x)$						

Exercice 12 *Application numérique en fonction trigo*

Savoir faire

- SF47 : Connaître les formules basiques d'addition

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Sachant que $x \in]0, \pi/2[$ et que $\cos x = 0.3$, déterminer $\sin(x)$ et $\tan(x)$.

Exercice 13

Savoir faire

- SF46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.1 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Combien valent les fonctions trigonométriques suivantes prises en certains angles (indiqués en radians), $\cos(0)$, $\sin(-\pi/2)$, $\cos(\pi/3)$, $\sin(\pi/3)$, $\cos(5\pi/4)$, $\tan(-\pi/4)$ et $\tan(\pi/2)$?

Exercice 14 *Cercle trigo*

Savoir faire

- SF212 : Savoir placer des angles (x, Pi + x, ...), leurs cos et leur sin sur un cercle trigo

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Placer sur le cercle trigo un angle x entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Placer $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Placer les angles $-x, \pi - x, \frac{\pi}{2} - x, \pi + x, \frac{\pi}{2} + x$ ainsi que leurs cosinus et sinus.

Exercice 15 *Translation des fonctions trigos : formulaire*

Savoir faire

- SF47 : Connaître les formules basiques d'addition

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Complétez :

1. $\cos(\pi + x) =$
2. $\cos(\pi/2 + x) =$
3. $\cos(\pi/2 - x) =$
4. $\cos(-x) =$
5. $\sin(\pi + x) =$
6. $\sin(\pi/2 + x) =$
7. $\sin(2\pi + x) =$
8. $\sin(-x) =$

Exercice 16 *formules trigo*

Savoir faire

- SF47 : Connaître les formules basiques d'addition

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Exprimer en fonction de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ et donner le domaine de validité :

$$\begin{array}{lll} \cos(x-y)\,, & \sin(x-y)\,, & \tan(x-y)\,, \\ \cos(x+\pi)\,, & \sin(x+\pi)\,, & \tan(x+\pi)\,. \\ \cos(\frac{\pi}{2}-x)\,, & \sin(\frac{\pi}{2}-x)\,, & \tan(\frac{\pi}{2}-x)\,. \end{array}$$

Exprimer en fonction de $\cos(x \pm y)$ et $\sin(x \pm y)$ et donner le domaine de validité :

$$\cos x \cos y\,, \qquad \sin x \sin y\,, \qquad \cos x \sin y\,.$$

Exercice 17 *Formule d'addition des fonctions trigos*

Savoir faire

- SF47 : Connaître les formules basiques d'addition

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Complétez :

1. $\cos(a + b)$
2. $\sin(a + b)$
3. $\cos(x)^2$ (en fonction de $\cos(2x)$)

Exercice 18 *Plan complexe*

Savoir faire

- SF1189 : Savoir placer un point dans le plan complexe

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 30.1, 30.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Placer dans le plan complexe les complexes d'affixe $1, i, -i, i^2, 1+i, -5-2i, e^{\frac{2i\pi}{3}}, 3e^{\frac{i\pi}{4}}$.

Exercice 19 *opérations sur les complexes*

Savoir faire

- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 30.1, 30.3.1 30.3.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Calculer les nombres complexes suivants :

1. $(1+i)(2-i)$
2. $2+i+3-5i$
3. $(2-i)(3-i)+4i$
4. $(1+i)^2$
5. $(\sqrt{3}/2+i/2)^3$

Exercice 20 *Identifier Re et Im*

Savoir faire

- SF1256 : Savoir identifier partie réelle et imaginaire

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 30.1, 30.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Déterminer la partie réelle et partie imaginaire des complexes suivants :

1. $1+i$
2. $5i-2$
3. i
4. 1
5. $1+i-5+6i$
6. $(2-i)(3+5i)$
7. $\dfrac{5-i}{6+3i}$

Exercice 21 *partie imaginaire et réelle d'un nombre complexe*

Savoir faire

- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 30.3.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Calculez la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

a) $\dfrac{1}{1-i}$ a) $\dfrac{1+i}{3-4i}$ a) $\dfrac{2-i}{3+i}$ a) $\dfrac{3-i}{2+4i}$ a) $\dfrac{2-2i}{4+5i}$ a) $\dfrac{5+2i}{1-3i}$

Exercice 22

Savoir faire

- SF82 : Connaître les formules d'Euler

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 31.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Exprimer e^{ix} à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$. Exprimer ensuite $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à l'aide de e^{ix} et e^{-ix}.

Exercice 23

Savoir faire

- SF79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu les parties 31.1, 31.2, 31.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Mettre sous forme exponentielle :

a) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$

a) i

a) $1+i$

a) $1-\sqrt{3}i$

a) $\sqrt{3}+i$

a) $\dfrac{i}{1+\sqrt{3}i}$

Exercice 24 *Forme algébrique à partir d'un quotient ou d'une forme trigo*

Savoir faire

- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué

Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1. $\dfrac{1-i}{1+i}$
2. $e^{i\pi/4}$
3. $2e^{2i\pi/3}$
4. i^{2015}

Exercice 25 *cos(pi/12)*

Savoir faire

- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle

1. Ecrire sous forme algébrique $e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{\pi}{3}}$.
2. En déduire la forme algébrique de $e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}}$.
3. Quelle est la forme trigonométrique de $e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{\pi}{3}}$?

4. En déduire les valeurs de $\cos(\dfrac{\pi}{12})$ et $\sin(\dfrac{\pi}{12})$.

Exercice 26

Savoir faire

- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle

Soit $z_1 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = e^{-i\frac{\pi}{6}}$. Calculer $z_1 z_2$, $\dfrac{z_1}{z_2}$, $\overline{z_1} z_2^2$.

Exercice 27

Savoir faire

- SF48 : Savoir résoudre des équations simples (type sin(x)=1/2)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Déterminer les zéros de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{2} - \sin(2x)$.

Exercice 28

Savoir faire

- SF48 : Savoir résoudre des équations simples (type sin(x)=1/2)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 28.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les deux équations $\cos(x) = 0$, $\sin(x) = 1/2$ et $\cos(3x) = -\sqrt{3}/2$. Ecrire précisément la forme des solutions.

Exercice 29

Savoir faire

- SF48 : Savoir résoudre des équations simples (type sin(x)=1/2)

Déterminer les abscisses des points en lesquels les courbes de cos et de sin s'intersectent.

Exercice 30 *linéarisation des expressions trigo*

Savoir faire

- SF83 : Savoir utiliser les formules d'Euler pour linéariser une fonction trigonométrique

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 31.4 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

1. Linéariser $\cos^4(x)$ (c'est-à-dire, exprimer comme une somme de termes en $\cos(x), \sin(x), \cos(2x), \sin(2x)$, etc.).
2. Développer $\cos(3x)$: exprimer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ uniquement. Faire de même avec $\cos(4x)$

Exercice 31

Savoir faire

- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 32.2.1 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1. $-5+12i$
2. $15-8i$
3. $-33+56i$

Exercice 32

Savoir faire

- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 32.2 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Résoudre les équations suivantes, où $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 - 2z + 4 = 0$
2. $z^2 + z + 1 = 0$
3. $z^2 = 5 - 12i$
4. $z^2 - \sqrt{5}z + 3i = 0.$

Exercice 33 *QCM-1088*

Savoir faire

- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes

Quel est l'ensemble des solutions de l'équation complexe $z^2 + 5(1-i)z - 4(4i+3) = 0$?

☐ $\{1-4i; -6-2i\}$

☐ $\{1-3i; -6-2i\}$

☐ $\{1+4i; -6+2i\}$

☐ $\{1+3i; -6+2i\}$

Exercice 34 *unicité Re et Im : équation*

Savoir faire

- SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires

Résoudre les équations complexes suivantes (trouver z tel que) :

1. $z - 2 + i = 3i - 2z.$
2. $z = \overline{z}.$
3. $z + \overline{z} = 0.$
4. $z = -2\overline{z} + 2$
5. $\dfrac{3z+1}{2\overline{z}-2i} = 2$

Exercice 35

Savoir faire

- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + (-2+i)z - 1 + 5i = 0$
2. $z^2 + (5+i)z + (8+i) = 0$
3. $z^2 - (3+4i)z - 1 + 5i = 0$
4. $z^4 + 4 = 0$
5. $(z^2 + z + 1)^2 + 1 = 0$

Exercice 36

Savoir faire

- SF9 : Savoir simplifier des expressions (développement, factorisation, fractions...)
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF82 : Connaître les formules d'Euler

Soient $n \in \mathbb{N}, \theta \in \mathbb{R}$. Démontrer que $(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. En déduire l'expression de $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

Exercice 37 *Technique de l'angle moitié*

Savoir faire

- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF213 : Savoir utiliser la technique de l'angle moitié pour simplifier une expression

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 31.4.3 du cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

Démontrer les égalités suivantes : on se donne a, b deux réels, et $x \neq \pi + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ un autre réel.

1. $\dfrac{e^{ia} + e^{ib}}{e^{ic} + e^{id}} = e^{i\frac{a+b-c-d}{2}} \dfrac{\cos(\frac{a-b}{2})}{\cos(\frac{c-d}{2})}$.
2. $\dfrac{e^{2ix} - 1}{e^{2ix} + 1} = \dfrac{i\sin(x)}{\cos(x)}$.

5.2 Exercices de niveau Avancé et Expert

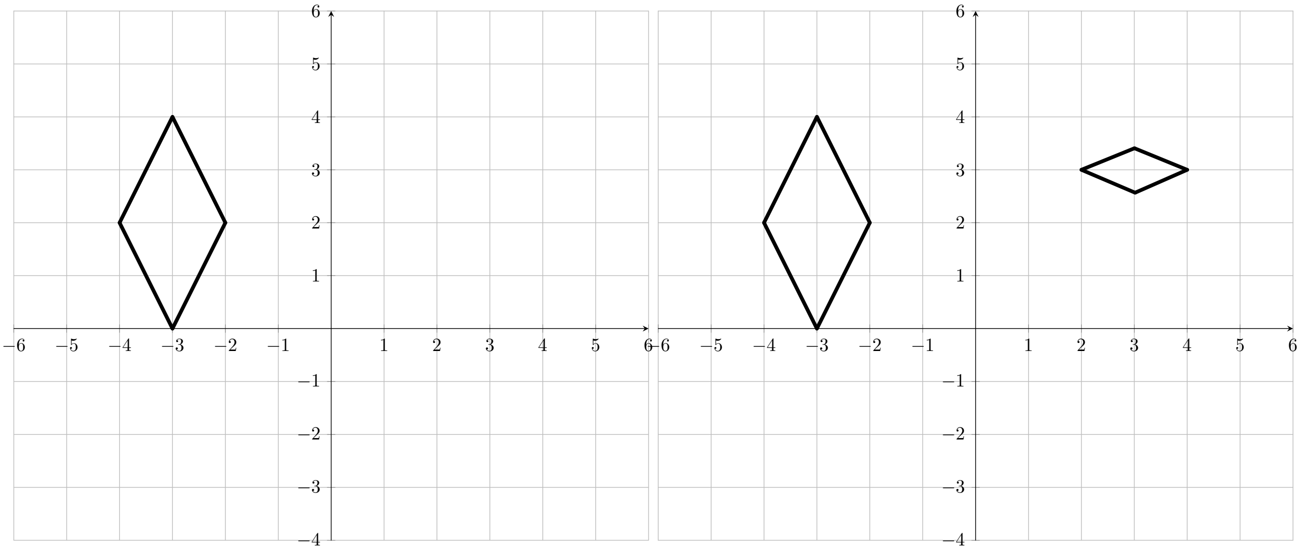
Exercice 38 *Niveau Avancé*
Pour chacune de ces expressions, on souhaite déterminer la forme exponentielle. Plusieurs méthodes sont possibles à chaque fois : expliquez quelle est à chaque fois la méthode la plus appropriée et pourquoi et faites le calcul.

$$\frac{1+i}{1+i\sqrt{3}}, \quad (\sqrt{3}-i)^2, \quad (\sqrt{3}-i)^{1000}, (1-2i)^2(1+7i)e^{-2\ln(5)+i\frac{\pi}{3}}$$

Exercice 39 *Niveau Avancé*
Dessiner sur le graphe de gauche l'image du losange par les fonctions définies pour tout z complexe par :

1. $e(z) = \overline{z}$
2. $f(z) = z + 2$.
3. $g(z) = e^{i\frac{3\pi}{4}} z$.
4. $h(z) = e^{i\frac{\pi}{4}}(z+3) - 3$.

Dites ensuite pour chacune de ces fonctions à quelles opérations géométriques elles correspondent et donnez-en le maximum de caractéristiques.



Niveau Expert : Dans le dessin de droite, quelle transformation géométrique envoie le losange de gauche sur celui de droite ? Donnez l'expression de la fonction à laquelle correspond cette transformation géométrique.

Exercice 40 *Niveau Avancé*
Tout complexe peut s'écrire sous forme algébrique $z = a + ib$ et sous forme exponentielle $z = |z|e^{i\theta}$ avec $a, b, \theta, |z|$ des réels donnés. Faites un dessin expliquant ce que représentent géométriquement $a, b, \theta, |z|$. Faites ensuite la preuve qu'on peut passer de la forme algébrique à la forme exponentielle en explicitant quels théorèmes de géométrie sont utilisés pour ce passage.

Exercice 41 *Niveau Expert*

1. Quelles sont les solutions de $z^n = 1$ pour $n \in \mathbb{N}^\star$?
2. Interprétez graphiquement dans le plan complexe le résultat de la question 1 (expliquer géométriquement pourquoi les racines trouvées mises à la puissance n valent 1).
3. En déduire les solutions de l'équation $z^8 = 1 + i$.

Chapitre 6

AAV 6 : Discuter du domaine d'étude d'une fonction

Liste des Savoir-Faire du chapitre :

- ☐ SF37 : Savoir identifier une fonction périodique
- ☐ SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- ☐ SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- ☐ SF 4 : Savoir identifier une fonction composée (fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)
- ☐ SF5 : Savoir calculer une fonction composée (fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

6.1 Domaine de définition

Lorsqu'on veut étudier une fonction, la première chose à regarder est le domaine sur lequel il faut l'étudier. Ce qu'on appelle le domaine est simplement l'ensemble des points pour lesquels $f(x)$ existe. Par exemple, pour la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, 0 n'a pas d'image puisqu'on ne peut pas diviser par 0. En revanche, tout les autres réels ont bien une image. On dira que notre fonction est définie sur les réels non nuls.

Définition 10: Domaine de définition

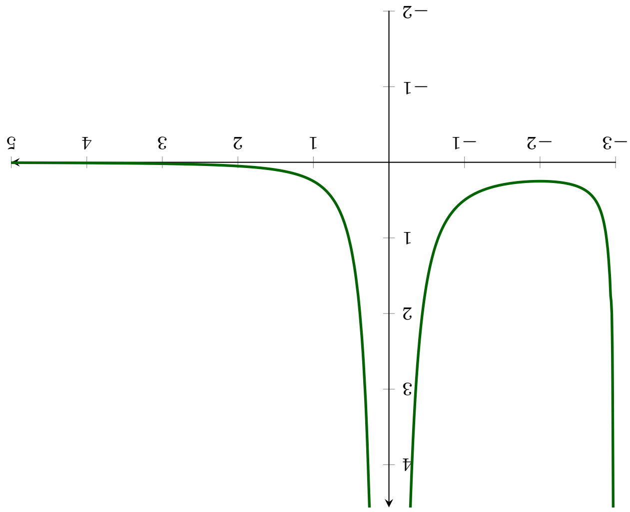
On appelle domaine de définition d'une fonction f, le sous-ensemble des réels x qui ont une image par f.

Remarque 20: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 39 Savoir trouver le domaine de définition + dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule.*

Questions :

- Tracez une fonction dont le domaine de définition est $]-3, 0[\cup]0, +\infty[$
- Faites les questions 1,2 de l'exercice 42 page 67.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.



6.2 Fonction composée

Dans l'étude de fonctions, la notion de composée est importante car de nombreuses fonctions sont en fait des composées de deux fonctions. Il sera important d'identifier ces composées afin de dériver la fonction et d'étudier ses variations.

6.2.1 Composer deux fonctions

Définition 11: Composée de deux fonctions

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $g : J \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $g(J) \subset I$. On appelle composée de f par g la fonction définie par

$$f \circ g \quad : \quad \begin{array}{ccc} J & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Pourquoi a-t-on besoin de la condition $g(J) \subset I$?

En pratique, composer f par g c'est calculer f au point $g(x)$. Il est donc indispensable pour cela que $g(x)$ appartienne à l'ensemble de définition de f qui est I. Ceci doit être valable pour tous les x de l'ensemble de définition de g qui n'est autre que J. Voilà pourquoi $g(J)$ doit être un sous-ensemble de I. Il est temps de passer aux exemples pratiques.

Remarque 21: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF 5 Savoir calculer une fonction composée.*

Questions :

- Expliquez pourquoi la condition $g(J) \subset I$ est nécessaire ?
- Faites la question 2 de l'exercice 46 page 68.

6.2.2 Identifier une composition de fonctions

Il sera nécessaire pour le calcul de dérivées d'être capable d'écrire une fonction donnée comme une composée de deux fonctions. En effet, vous utiliserez souvent la formule de dérivation composée dans vos études de fonctions.

Remarque 22: La vidéo associée

Il est temps de consulter la vidéo : *SF4 Savoir identifier une fonction composée (fonction de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*).*

Questions :

- Faites deux questions de l'exercice 48 page 69.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

6.3 Restreindre le domaine d'étude d'une fonction

Pour étudier une fonction, il est nécessaire de connaître son domaine de définition. Certaines fonctions ont des propriétés particulières qui permettent de réduire leur intervalle d'étude et d'ainsi rendre l'étude plus aisée. C'est le cas des fonctions qui possèdent une parité et/ou une périodicité.

6.3.1 Parité

Définition et interprétation

Remarque 23: La vidéo associée

Pour comprendre ce qu'est graphiquement une fonction paire/impaire, consulter les cinq premières minutes de la vidéo : *SF 38 : Savoir étudier la parité d'une fonction.*

Définition 12: Parité

Soient I un intervalle symétrique par rapport à 0, J un intervalle et $f : I \to J$ une fonction, on dit que

- f est paire si : $\forall x \in I, f(-x) = f(x)$.
- f est impaire si : $\forall x \in I, f(-x) = -f(x)$.

Comme vous l'avez-vu dans la vidéo, une fonction paire est donc une fonction symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et une fonction impaire est symétrique par rapport à l'ordonnée. Ces deux propriétés de symétrie font que pour tracer une fonction paire ou impaire, il suffit de la connaître sur les réels positifs. Pour avoir le tracé sur les réels négatifs, il suffira alors d'appliquer la symétrie en question. Ainsi pour une telle fonction, on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intersection avec les réels positifs positifs.

Par exemple pour les fonctions $f : x \mapsto x^2$ et $g : x \mapsto x^3$, l'étude sur $\mathbb{R}_+$ suffit pour reconstituer la fonction partout.

Questions :

- Dessinez une fonction paire non classique. Même question pour une fonction impaire.

Propriétés

Voici quelques propriétés sur les fonctions paires et impaires dont la démonstration vous sera utile pour les exercices de td.

Proposition 24: Somme

Soient f et g définies sur I un intervalle symétrique par rapport à 0

- Si f et g sont deux fonctions paires alors $f + g$ est paire.

- Si f et g sont deux fonctions impaires alors $f+g$ est impaire.

Preuve :

- Pour chacune des propriétés, écrire les hypothèses et les traduire.
- Pour chacune des propriétés, écrire le but et le traduire.
- Démontrer enfin les deux propriétés.

Première propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions paires.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$.
- But : $f+g$ paire.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(-x) = (f+g)(x)$.

Soient f et g deux fonctions paires

$$\begin{array}{lll} (f+g)(-x) & = f(-x)+g(-x) & \text{par définition de } f+g \\ & = f(x)+g(x) & \text{puisque } f, g \text{ sont paires.} \\ & = (f+g)(x) & \text{par définition de } f+g \end{array}$$

Donc $f+g$ est paire.

Deuxième propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions impaires.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$.
- But : $f+g$ paire.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}, (f+g)(-x) = -(f+g)(x)$.

Soient f et g deux fonctions impaires

$$\begin{array}{lll} (f+g)(-x) & = f(-x)+g(-x) & \text{par définition de } f+g \\ & = -f(x)-g(x) & \text{puisque } f, g \text{ sont impaires.} \\ & = -(f+g)(x) & \text{par définition de } f+g \end{array}$$

Donc $f+g$ est impaire.

Proposition 25: Produit

Soient f et g définies sur I un intervalle symétrique par rapport à 0

- Si f et g sont deux fonctions paires alors $f \times g$ est paire.
- Si f et g sont deux fonctions impaires alors $f \times g$ est paire.

Preuve à faire par tous :

- Pour chacune des propriétés, écrire les hypothèses et les traduire.
- Pour chacune des propriétés, écrire le but et le traduire.
- Démontrer enfin les deux propriétés.

Première propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions paires.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x), g(-x) = g(x)$.
- But : fg est paire.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}, fg(-x) = fg(x)$ c'est-à-dire $f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$.

Soient f et g deux fonctions paires

$$\begin{aligned}(fg)(-x) &= f(-x)g(-x) && \text{par définition de } fg\\ &= f(x)g(x) && \text{puisque } f, g \text{ sont paires.}\\ &= (fg)(x) && \text{par définition de } fg\end{aligned}$$

Donc fg est paire.

Deuxième propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions impaires.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = -f(x), g(-x) = -g(x)$.
- But : fg est paire.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}, fg(-x) = fg(x)$ c'est-à-dire $f(-x)g(-x) = f(x)g(x)$.

Soient f et g deux fonctions impaires

$$\begin{aligned}(fg)(-x) &= f(-x)g(-x) && \text{par définition de } fg\\ &= (-f(x))(-g(x)) && \text{puisque } f, g \text{ sont impaires.}\\ &= (fg)(x) && \text{par définition de } fg\end{aligned}$$

Donc fg est paire.

Remarque 24: La vidéo associée

Il est temps de consulter les deux dernières minutes de la vidéo : *SF 38 : Savoir étudier la parité d'une fonction.*

Questions :

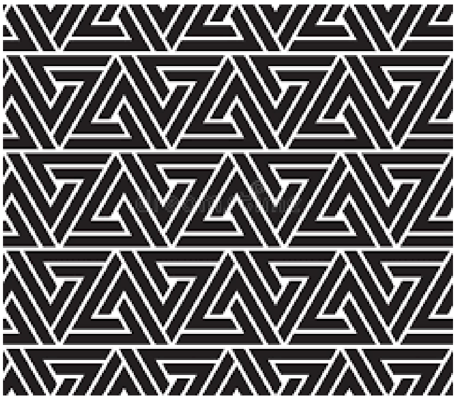
- Faites la question 1 de l'exercice 51 page 70 (étudier simplement la parité).
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.

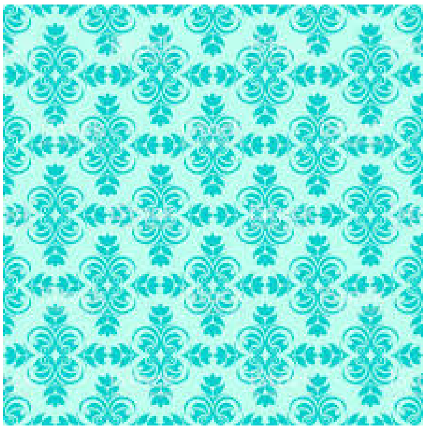
6.3.2 Périodicité

Définition et interprétation

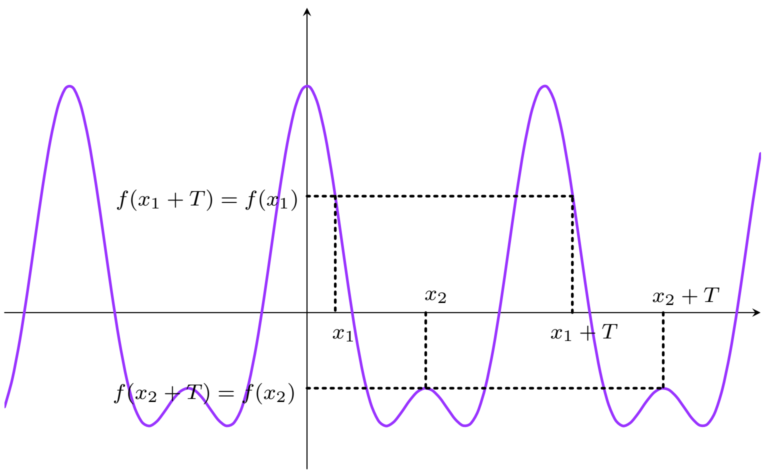
Vision graphique et impact sur le domaine d'étude.

La périodicité se définit par la capacité d'un motif à se reproduire à l'identique. Par exemple, de nombreux ornements utilisent des motifs périodiques.





Pour les fonctions le principe est le même, une fonction sera dite périodique si on peut la construire en reproduisant à l'infini un motif prédéfini. Par exemple, la fonction ci-dessous est périodique. Pour vous en faire une imagine dynamique, regardez le gif *fonctions periodiques.gif*.



Comment définir mathématiquement une fonction périodique de période T ?

Prenons un point x comme sur le dessin, et notons $f(x)$ son image. Si le motif se reproduit tous les intervalles de taille T, cela signifie que l'image de $x+T$ doit être la même cad que $f(x+T)=f(x)$. Ceci doit être vrai, pas pour un seul x mais pour n'importe quel x. D'où la définition suivante.

Définition 13: Périodicité

Soient $T>0$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction, on dit que

- f est $T-$*périodique* si : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x+T)=f(x)$
- f est *périodique* s'il existe $T>0$ telle que f est T-périodique.

Remarque 25: O

n peut aussi de la même façon définir une notion de fonction périodique pour des fonctions qui ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$, par exemple les fonctions $x\mapsto\dfrac{1}{\cos(x)}$ ou tan. Mais dans ce cas il faut que le domaine de définition soit aussi invariant par translation par la période.

Questions :

- Dessinez une fonction périodique de période 4.

Propriétés

Commençons à manipuler la définition de périodicité sur quelques propriétés. Ces manipulations vous seront utiles car identiques à celles que vous utiliserez en TD.

Proposition 26: Somme

Soient f et g deux fonctions $T-$périodiques. Alors $f+g$ et fg sont $T-$périodiques.

Preuve :

- Pour chacune des propriétés, écrire les hypothèses et les traduire.
- Pour chacune des propriétés, écrire le but et le traduire.
- Démontrer enfin les deux propriétés.

Première propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions $T-$périodiques.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, $g(x+T) = g(x)$.
- But : $f+g$ $T-$périodique.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x+T) = (f+g)(x)$.

Soient f et g deux fonctions $T-$périodiques

$$\begin{aligned}(f+g)(x+T) &= f(x+T)+g(x+T) && \text{par définition de } f+g\\ &= f(x)+g(x) && \text{puisque } f, g \text{ sont } T\text{-périodiques.}\\ &= (f+g)(x) && \text{par définition de } f+g\end{aligned}$$

Donc $f+g$ est $T-$périodique.

Deuxième propriété :

- Hypothèse : f et g deux fonctions $T-$périodiques.
- Traduction de l'hypothèse : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$, $g(x+T) = g(x)$.
- But : fg $T-$périodique.
- Traduction du but : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(fg)(x+T) = (fg)(x)$.

Soient f et g deux fonctions $T-$périodiques

$$\begin{aligned}(fg)(x+T) &= f(x+T)g(x+T) && \text{par définition de } fg\\ &= f(x)g(x) && \text{puisque } f, g \text{ sont } T\text{-périodiques.}\\ &= (fg)(x) && \text{par définition de } fg\end{aligned}$$

Donc fg est $T-$périodique.

Remarque 26: La vidéo associée

Pour montrer qu'une fonction est périodique, la méthodologie est la même que pour la vidéo *SF 38 : Savoir étudier la parité d'une fonction,* sauf qu'il faut remplacer la définition de paire par celle de périodique.

Questions :

- Faites la question 1 de l'exercice 51 (montrer que la fonction est $\pi-$périodique après avoir étudié la période de chaque morceau.
- Faites une feuille blanche pour vous remémorer les définitions/propositions/théorèmes du chapitre jusqu'ici. Ou alors défiez un de vos camarades pour restituer plusieurs définitions/propositions/-théorèmes de la partie.
- Attaquez-vous maintenant aux problèmes liant les savoir faire. Si vous bloquez trop, retournez vers les exos de savoir faire.

Exercices du chapitre 6

6.1 Travailler les savoir-faire

Dans cette section, vous trouverez les exercices d'entraînement sur les savoir-faire spécifiques.

Exercice 42

Savoir faire

- SF10 : Résoudre une équation du second degré
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 19 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

Déterminer le domaine de définition et de dérivabilité des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \dfrac{2}{x-1}$.
2. $x \mapsto \sqrt{x+4}$.
3. $x \mapsto \dfrac{1}{x^2-6x+5}$
4. $x \mapsto \cos(\sqrt{x})$
5. $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{2x-3}$
6. $x \mapsto |x^2-1|$

Exercice 43

Savoir faire

- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 19 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction :

1. $f : x \mapsto \sqrt{1-x} - \sqrt{x+3}$
2. $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{-5x^2+15x+50}}$
3. $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+\sqrt{x^2}}$

Exercice 44

Savoir faire

- SF5 : Savoir calculer une fonction composée

Dans les expressions suivantes, remplacer la variable x par $2x$, puis par $\cos(x)$, puis par y^2.

(a) $3x^2+3+e^x$

(a) $\cos(x)+\sin(x)$

(a) $\dfrac{3x+2}{4x+3}$

(a) $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x+\ln(x)}{x^2}$

Exercice 45 *QCM-760*

Savoir faire

- SF5 : Savoir calculer une fonction composée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 20.1 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction ?*

Soit f et g définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = \ln(x)$. Alors,

- ☐ $f \circ g(x) = \cos(\ln(x))$
- ☐ $f \circ g$ n'est pas définie.
- ☐ $f \circ g(x) = \ln(\cos(x))$

Exercice 46 *fonctions composées*

Savoir faire

- SF5 : Savoir calculer une fonction composée
- SF1 : Savoir identifier un ensemble de départ ou d'arrivée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 20.1 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction ?*

Dans chacun des cas suivants, calculer $f \circ g$ et $g \circ f$, si c'est possible.

1. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x+1 \end{cases}$
2. $f : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{x+1} \end{cases}$
3. $f : \begin{cases} \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln(x) \end{cases}$ et $g : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$

Exercice 47

Savoir faire

- SF4 : Savoir identifier une fonction composée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 20.2 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction ?*

Soient les fonctions $f(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$ et $g(x) = \sqrt{2 + \dfrac{1}{(1+x)^2}}$.

Ecrire f et g comme composition des fonctions $a(x) = \sqrt{x}$, $b(x) = \dfrac{1}{x}$, $c(x) = x^2$ et $d(x) = 1 + x$.

Exercice 48

Savoir faire

- SF6 : Comprendre le concept de variable / ne pas être perturbé par le changement de notations
- SF4 : Savoir identifier une fonction composée

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 20.2 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction ?*

Ecrire les fonctions suivantes comme une composée de deux fonctions que vous définirez.

1. $x \mapsto \sin(2x)$.
2. $x \mapsto e^{x^2+1}$
3. $x \mapsto \sqrt{x^3 - x}$.
4. $u \mapsto \dfrac{1}{u^2 - 3}$
5. $t \mapsto \ln(t)^2 - 1$

Exercice 49

Savoir faire

- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 21.1 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

Etudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x^4 - x^2 + 5$
2. $g(x) = 2x - x^3$
3. $h(x) = x^5|x|$
4. $k(x) = \dfrac{x^7}{1 + x^2}$

Exercice 50 *QCM-675*

Savoir faire

- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 21.2 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

Quelle est la période de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $t \mapsto A\cos(\omega t + \phi)$ où $(A, \omega, \phi) \in \mathbb{R}^3$?

- ☐ $2A\pi$
- ☐ $A\dfrac{\omega}{2\pi}$
- ☐ $\dfrac{\omega}{2\pi}$
- ☐ $A\dfrac{2\pi}{\omega}$
- ☐ 2π
- ☐ $\dfrac{2\pi}{\omega}$

Exercice 51 *Déterminer la parité et la périodicité d'une fonction*

Savoir faire

- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 21 du cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

Déterminer si les fonctions définies par les formules suivantes sont paires, impaires, périodiques. Dans le cas des fonctions périodiques, on précisera la période des fonctions considérées.

a) $f(x) = \sin(2x) + \tan(3x)$

a) $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{x^2 + 1}$

a) $f(x) = \dfrac{|x - 2|}{x^2 - 4x + 4}$

a) $f(x) = \sin(x + 3)\cos(2x - 1)$

a) $f(x) = \ln(|x|)\sqrt{1 + \cos(x)}$

Exercice 52

Savoir faire

- SF30 : Savoir tracer/reconnaître le graphe des fonctions usuelles sans hésitation
- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule

Déterminer l'ensemble de définition et la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \cos(\sin x)$
2. $g(x) = \dfrac{x^3}{\sin x}$
3. $h(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
4. $k(x) = |\sin x|$

Etudier la périodicité de f, h et k. Tracer le graphe de k.

6.2 Exercices de niveau Avancé et Expert

Exercice 53 *Niveau Expert*

1. Rappelez ce que signifie en termes de symétrie qu'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est paire.
2. Interprétez ce que signifie en termes de symétrie qu'une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifie pour tout x réel, $f(2-x) = f(x)$. Expliquez votre interprétation graphiquement et algébriquement (on attend de voir la symétrie en termes d'équation).
3. Même question pour $a \in \mathbb{R}$ et une fonction vérifiant $f(a-x) = f(x)$.

Exercice 54 *Niveau Expert*

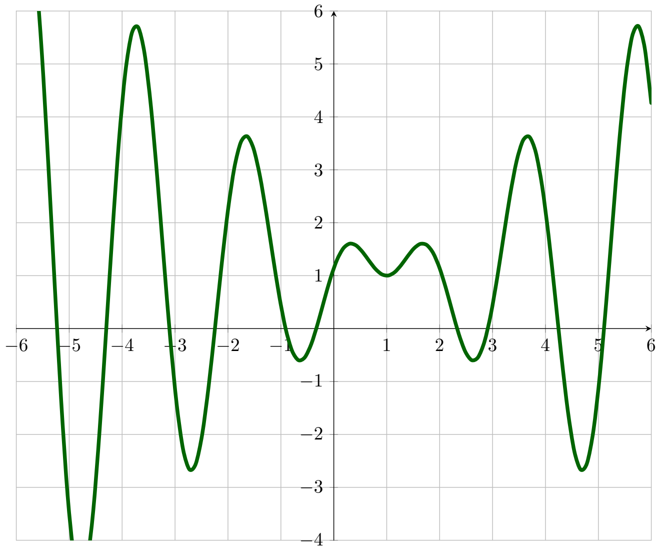
Dans cet exercice, vous pourrez vous appuyer sur ce que vous savez sur les fonction exp et ln.

1. Rappelez ce que signifie en termes de symétrie que deux fonctions f, g définies sur $\mathbb{R}$ vérifient $f(g(x)) = x$.
2. Interprétez ce que signifie en termes de symétrie que deux fonctions définie sur $\mathbb{R}$ vérifie pour tout x réel, $f(g(2x)) = x$. Expliquez votre interprétation graphiquement.

Exercice 55 *Niveau Expert*

On se donne la fonction $f : x \mapsto x\sin(3x-3) - \sin(3x-3) + 1$ dont le graphe est représenté ci-dessous. Choisir quatre réels a, b, c, d de sorte que la fonction $g(x) = af(b(x-c)) + d$ soit paire. Justifiez alors de deux manières que g est paire :

- par le calcul.
- par une explication graphique.



Exercice 56 *Niveau Avancé*

1. Démontrez qu'une composée de deux fonctions impaires est impaire.
2. Démontrez qu'une composée de deux fonctions paires est paire.
3. En fait, vérifiez que le résultat de la question précédente reste valable si on suppose seulement que la première fonction qu'on applique est paire.
4. Peut-on alléger de la même façon le résultat de la question 1 ? Justifiez.

Chapitre 7

Exercices Bloc 2 : Exercices liant les savoir-faire

Dans ce chapitre, vous trouverez le format d'exercice qui sera posé à l'évaluation. Ces exercices sont constitués de savoir-faire rassemblés dans un contexte commun. Ils peuvent mettre en jeu des savoir-faire d'un ou plusieurs AAV du bloc.

Exercice 57

Pour $x \in \mathbb{R}$, on définit $f(x) = |1 + e^{ix}|$ et $g(x) = \ln(f(x))$.

1. Quel est le domaine de définition de f ? Que valent $g(\pi/2)$ et $g(\pi/3)$? (on simplifiera au maximum)
2. Montrer que f et g sont périodiques et en donner une période.
3. Quand a-t-on $e^{ix} = -1$? En déduire le domaine de définition de g.
4. En factorisant par $e^{ix/2}$, démontrer que $f(x) = 2|\cos(\dfrac{x}{2}|$.

Exercice 58

Savoir faire

- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes
- SF1256 : Savoir identifier partie réelle et imaginaire
- SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

On considère le polynôme $z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (-1 - 5i)z + 6 + 2i$.

1. On cherche une racine réelle à ce polynôme.
   (a) Démontrer que si une telle solution existe et est notée x, elle vérifie $2x^2 - 5x + 2 = 0$.
   (b) Trouver les racines de $2x^2 - 5x + 2 = 0$ et en déduire la racine réelle notée α de $z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (-1 - 5i)z + 6 + 2i$.
2. En déduire alors que $z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (-1 - 5i)z + 6 + 2i = (z - \alpha)(az^2 + bz + c)$ où a, b, c sont des nombres complexes à trouver.
3. Déterminer alors toutes les racines du polynôme $z^3 + (-3 + 2i)z^2 + (-1 - 5i)z + 6 + 2i$.

Exercice 59

Savoir faire

- SF46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo
- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF213 : Savoir utiliser la technique de l'angle moitié pour simplifier une expression

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

On considère le nombre complexe $z = \dfrac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Rappeler les valeurs des cos et sin des angles $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, -\pi$.
2. Pour $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{2}$, en déduire la valeur de z.
3. Mettre z sous forme algébrique (l'expression devra être écrite en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$).
4. Déterminer z_1 et z_2 deux complexes de sorte que $1 - e^{ix} = e^{i\frac{x}{2}}(z_1 - z_2)$.
5. En déduire une expression de $1 - e^{ix}$ en fonction de $e^{i\frac{x}{2}}$ et $\sin(\frac{x}{2})$.
6. De même déterminer une expression de $1 + e^{ix}$ en fonction de $e^{i\frac{x}{2}}$ et $\cos(\frac{x}{2})$.
7. En déduire une expression de z en fonction de $\cos(\frac{x}{2})$ et $\sin(\frac{x}{2})$.

Exercice 60

Savoir faire

- SF79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- SF81 : Savoir résoudre une équation du second degré en complexes
- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF1189 : Savoir placer un point dans le plan complexe
- SF1256 : Savoir identifier partie réelle et imaginaire
- SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

1. Placer le point $1 + i$ dans le plan complexe.
2. Calculer la forme exponentielle de $1 + i$. Ecrire alors $1 + i$ sous la forme z_0^2où z_0 est un complexe à déterminer.
3. Exprimer z_0 en fonction de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.
4. Calculer d'une autre manière la forme algébrique de la racine carrée de $1+i$. Vous pourrez essayer de résoudre $z^2 = 1 + i$ pour cela.
5. En déduire les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{8})$ et $\sin(\frac{\pi}{8})$.

Exercice 61

Savoir faire

- SF46 : Connaître les valeurs particulières des fonctions trigo
- SF47 : Connaître les formules basiques d'addition
- SF48 : Savoir résoudre des équations simples (type sin(x)=1/2)
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF83 : Savoir utiliser les formules d'Euler pour linéariser une fonction trigonométrique
- SF212 : Savoir placer des angles (x, Pi + x, ...), leurs cos et leur sin sur un cercle trigo

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

1. Placer les valeurs des cos et sin des angles $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \pi$ sur le cercle trigonométrique.
2. Donner les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$ pour a, b deux réels
3. Rappeler l'expression de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix}.
4. En déduire que $\cos(x)^2 = \dfrac{1+\cos(2x)}{2}$.
5. Résoudre $\cos(2x) = \dfrac{1}{2}$.
6. En déduire les solutions de $\cos(x)^2 = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 62

Savoir faire

- SF77 : Savoir manipuler la forme algébrique
- SF78 : Savoir mettre sous forme algébrique une fraction en utilisant le conjugué
- SF79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF82 : Connaître les formules d'Euler
- SF1256 : Savoir identifier partie réelle et imaginaire
- SF1257 : Savoir utiliser l'unicité des parties réelles et imaginaires
- SF1189 : Savoir placer un point dans le plan complexe

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

On considère $z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2+2i}$

1. Mettre sous forme exponentielle $1+i\sqrt{3}$ et $2+2i$ et placer ces points dans le plan complexe.
2. En déduire la forme exponentielle de z.
3. Mettre z sous forme algébrique.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 63

Savoir faire

- SF79 : Savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle
- SF80 : Savoir utiliser la multiplicativité de la forme exponentielle
- SF1189 : Savoir placer un point dans le plan complexe

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Effectuer un exercice de base sur les complexes* ?

On cherche à résoudre l'équation $Z^8 = 1+i$.

1. Vérifier que pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$, $e^{\frac{2ki\pi}{8}}$ est solution de $z^8 = 1$. On admet que ces solutions sont les seules.
2. Placez dans le plan complexe les $e^{\frac{2ki\pi}{8}}$ pour $k \in \{0, 1, \ldots, 7\}$.
3. Mettre sous forme exponentielle $1+i$. Trouver alors z_0 de la forme $ae^{i\theta}$ tel que $z_0^8 = 1+i$ pour a un réel positif et θ un réel.
4. Démontrer alors que $Z^8 = 1+i$ se récrit de manière équivalente sous la forme $(\dfrac{Z}{z_0})^8 = 1$.
5. Déduire de la question 1, les solutions Z de $Z^8 = 1+i$.

Exercice 64

Savoir faire

- SF31 : Connaître les valeurs importantes de ln/exp
- SF32 : Savoir utiliser les règles de calculs avec ln pour simplifier une expression
- SF34 : Connaître la définition d'une puissance non entière et simplifier des fractions de puissances

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Écrire sous la forme x^p, avec $p \in \mathbb{R}$, les expressions suivantes :

$$\left(x^{2/5}\right)^{25/3}, \qquad \frac{x^{-10}}{x^4}, \qquad \frac{\sqrt{x}}{x^2x^{-1}}.$$

2. On cherche à résoudre l'équation $(E) : \ln(x) + 2\ln(3) - \ln(2) = 0$.
   (a) Pour quels x, $\ln(x)$ est-il défini ?
   (b) Ecrire $2\ln(3) - \ln(2)$ sous la forme $\ln(a)$ où a est un réel à déterminer.
   (c) En déduire que l'équation (E) se met sous la forme $\ln(\frac{9x}{2}) = 0$.
   (d) En prenant l'exponentielle des deux côtés de $\ln(\frac{9x}{2}) = 0$, déterminer les solutions de cette équation.

Exercice 65

Savoir faire

- SF31 : Connaître les valeurs importantes de ln/exp
- SF33 : Savoir utiliser les règles de calculs avec exp pour simplifier une expression
- SF34 : Connaître la définition d'une puissance non entière et simplifier des fractions de puissances

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu la partie 13, 14.1, 14.2 du cours *Utiliser les fonctions ln, exp et en connaître les caractéristiques* ?

On considère x et y deux réels et la quantité $P = \dfrac{e^x e^y \sqrt{2}\sqrt[3]{3}}{2^2 3^3 (e^x)^2}$

1. On suppose uniquement dans cette question que $x = 0$ et $y = 0$. Mettre P sous la forme $2^a 3^b$ où a et b sont deux réels à trouver.
2. Mettre $e^x e^y$ sous la forme e^c où c est un réel dépendant de x et y que vous déterminerez. Même question pour $(e^x)^2$.
3. Simplifier alors au maximum l'expression P.
4. En déduire une expression de $\ln(P)$ en fonction de $x, y, \ln(2)$ et $\ln(3)$.

Exercice 66

Savoir faire

- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF39 : Savoir trouver le domaine de définition et de dérivabilité d'une fonction à partir d'une formule
- SF4 : Savoir identifier une fonction composée
- SF5 : Savoir calculer une fonction composée
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

On considère les deux fonctions $f : x \mapsto \cos(2x)$ et $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x-1}$.

1. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité de f et g.

2. Démontrer que f est $\pi-$périodique.
3. Tracer cos et f sur un même graphe.
4. Déterminer si les fonctions f et g sont paires ? impaires ?
5. Calculer $f \circ g$ après avoir donné son ensemble de définition.

Exercice 67

Savoir faire

- SF37 : Savoir identier une fonction périodique (et sa période)
- SF38 : Savoir étudier la parité d'une fonction
- SF5 : Savoir calculer une fonction composée
- SF201 : Savoir tracer le graphe de x-> f(x-a), f(ax), a f(x) et f(x)+a à partir du graphe de f

Avant de résoudre l'exercice, avez-vous lu le cours *Discuter du domaine d'étude d'une fonction* ?

On considère la fonction $f : x \mapsto \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

1. Ecrire cette fonction comme une composée de deux fonctions dont on précisera l'ensemble de définition.
2. Déterminer si f a une parité.
3. Démontrer que f est $2\pi-$périodique.
4. Tracer sin et f sur un même graphe.