Feuille d'exercices 3

Relations sur un ensemble

Exercice 3.1. Classes d'équivalence
Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation : $(x, y) \sim (x', y')$ ssi $xy = x'y'$.
1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Dans le plan $\mathbb{R}^2$, representer graphiquement les classes d'équivalence des éléments $(0, 0)$, $(1, 1)$ et $(1, -1)$.

Exercice 3.2. Représentants
Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $x \sim y$ ssi $|x| = |y|$.
1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.
2. Selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$, déterminer le cardinal de la classe d'équivalence $\overline{x}$.
3. Soit l'application canonique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\sim$. Montrer que $f_{|\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}/\sim$ est une bijection.

Exercice 3.3. Relation d'équivalence
Sur $\mathbb{R}$, on définit la relation : $x \sim y$ ssi $x^2 - y^2 = x - y$.
1. Trouver une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x \sim y$ ssi $f(x) = f(y)$.
2. En déduire que $\sim$ est une relation d'équivalence.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, déterminer la classe d'équivalence de x.

Exercice 3.4. Congruence modulo 2
On considère la relation d'équivalence $x \equiv y\ [2]$ sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient correspondant.
1. Montrer que si $x \equiv y\ [2]$, alors $(-1)^x = (-1)^y$.
2. En déduire qu'il existe une application $f : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ f(\overline{n}) = (-1)^n$$

3. Rappeler quels sont les éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et donner leurs images par l'application f.

Exercice 3.5. Congruence et ensembles quotients
Pour un entier $d \geq 1$, on note $\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'ensemble quotient pour la relation d'équivalence $x \equiv y\ [d]$ sur $\mathbb{Z}$, et $p_d : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/d\mathbb{Z}$ l'application canonique.
1. Soient deux entiers relatifs x et y. Montrer que si $x \equiv y\ [6]$, alors $x \equiv y\ [3]$.
2. En déduire qu'il existe une application $f : \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que $p_3 = f \circ p_6$.
3. Montrer que l'application f est surjective.
4. Soient les classes $\overline{0}$ et $\overline{3}$ modulo 6. Comparer $f(\overline{0})$ et $f(\overline{3})$. Est-ce que f est injective ?

Exercice 3.6. Partition
Soit X un ensemble non-vide et $(A_i)_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de X indexée par un ensemble I (c'est-à-dire que pour tout $i \in I$, A_i est un sous-ensemble de X). On suppose que cette famille forme une partition de X, c'est-à-dire que :

— pour tout $i \in I$, $A_i \neq \emptyset$
— pour tout $x \in X$, il existe $i \in I$ tel que $x \in A_i$
— pour tous i et j dans I, si $i \neq j$ alors A_i et A_j sont disjoints

On définit une relation R sur X par :

$$xRy \text{ ssi } \exists i \in I \ (x \in A_i \text{ et } y \in A_i)$$

1. Montrer que R est une relation d'équivalence sur X.

2. Montrer que les classes d'équivalence pour R sont exactement les sous-ensembles A_i.

Exercice 3.7. Relations d'ordre

À partir de l'ordre usuel $\leq$ sur $\mathbb{R}$, on définit les relations suivantes. Pour chacune de ces relations, dire si ce sont des relations d'ordre ; si oui, dire si elles sont totales ou partielles ; et si elles sont partielles, donner deux éléments incomparables.

1. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x,y)R(x',y')$ ssi $x \leq x'$ et $y \leq y'$.

2. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x,y)R(x',y')$ ssi $x \leq x'$ ou $y \leq y'$.

3. Sur l'ensemble $\mathbb{R}^2$, $(x,y)R(x',y')$ ssi $(x < x')$ ou $(x = x'$ et $y \leq y')$.

4. Sur l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f \leq g$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq g(x)$.

Exercice 3.8. Une relation sur les entiers

Sur $\mathbb{N}$, on définit une relation R par : xRy ssi il existe des entiers $n, m \geq 1$ tels que $y = nx^m$.

1. Montrer que pour tous $x, y \in \mathbb{N}$, si xRy alors $x \leq y$.

2. Montrer que R est une relation d'ordre.

3. Montrer que 2 et 3 sont incomparables pour la relation R.

Exercice 3.9. Inclusion

Soit X un ensemble non-vide. On considère la relation d'ordre $\subset$ sur $\mathcal{P}(X)$.

1. Vérifier que $\emptyset$ est le plus petit élément de $\mathcal{P}(X)$ et que X est le plus grand élément de $\mathcal{P}(X)$.

2. Quels sont les éléments minimaux de $\mathcal{P}(X) \setminus \{\emptyset\}$? S'agit-il de plus petits éléments ? (la réponse pourra dépendre de l'ensemble X)

3. On suppose ici que $X = \{1,2,3\}$. Représenter sur un graphe l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ avec la relation $\subset$.

Exercice 3.10. Divisibilité

On définit la relation suivante sur $\mathbb{N}$: $x|y$ ssi il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $y = kx$ (on dit que x divise y).

1. Montrer que c'est une relation d'ordre.

2. Montrer que 1 est le plus petit élément de $\mathbb{N}$ pour cette relation, et 0 le plus grand élément.

3. Caractériser les éléments minimaux de $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

4. Représenter par un graphe l'ensemble $\{1, \ldots, 12\}$ avec la relation $|$.