Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Corrigé du Partiel du 26 octobre 2023

Exercice 1. Soit P un énoncé. Est-ce que les énoncés P d'une part, et (non P) $\Rightarrow P$ d'autre part, sont équivalents ?
Réponse : Si P est vrai, alors (non P) $\Rightarrow P$ est vrai (car la conclusion est vraie).
Si P est faux, alors (non P) $\Rightarrow P$ est faux (car la prémisse est vraie mais la conclusion est fausse).
Ainsi les deux énoncés ont les mêmes valeurs de vérité, donc ils sont équivalents.

Exercice 2. On considère dans tout l'exercice une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Soit F l'énoncé "la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$" :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de réels, et pour une telle suite v, soit $S(v)$ l'énoncé "la suite v tend vers $+\infty$" :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq A)$$

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on notera $f(u)$ la suite dont le terme de rang n vaut $f(u_n)$.
On s'intéresse à l'énoncé

$$P \ : \quad \Big(\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ (S(u) \Rightarrow S(f(u)))\Big) \Rightarrow F$$

1. Quelle est la contraposée de P ? On écrira cette contraposée en utilisant les énoncés S et F sans les développer ; et on la notera P_1.
   Réponse :
   $$P_1 \ : \quad \text{non } F \Rightarrow \Big(\exists u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ (S(u) \text{ et non } S(f(u)))\Big)$$
2. Donner un énoncé équivalent à non F, dans lequel n'apparaît plus le symbole non .
   Réponse :
   $$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall B \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq B \text{ et } f(x) < A)$$

3. Même question pour non $S(v)$.

   Réponse :

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \text{ et } v_n < A)$$

4. Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \geq n$. Montrer que $S(v)$ est vrai. [On n'utilisera pas les théorèmes de comparaison des suites.]

   Réponse : Soit $A \in \mathbb{R}$. On peut choisir un entier $n_0 \geq A$. Alors pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq n \geq n_0 \geq A$. Donc $S(v)$ est vrai.

5. On suppose que F est faux. Montrer qu'il existe une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $S(u)$ est vrai mais $S(f(u))$ est faux.

   Réponse : Comme F est faux, on sait d'après la question 2 que l'on a :

$$\exists A \in \mathbb{R}\ \forall B \in \mathbb{R}\ \exists x \in \mathbb{R}\ (x \geq B \text{ et } f(x) < A)$$

   On choisit une fois pour toutes A qui convient comme ci-dessus, et on donne à B n'importe quelle valeur $n \in \mathbb{N}$: pour chaque $n \in \mathbb{N}$, il existe un $x \in \mathbb{R}$, que l'on va appeler u_n, tel que $u_n \geq n$ et $f(u_n) < A$; on a ainsi défini une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Comme $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on sait d'après la question précédente que $S(u)$ est vrai. De plus, par construction, pour la valeur de A choisie, on a que pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$, à savoir $n = n_0$, tel que $f(u_n) < A$. D'après la question 3, cela signifie que $S(f(u))$ est faux, ce qu'on voulait.

6. Est-ce que l'énoncé P est vrai ?

   Réponse : D'après la question 1, on vient exactement de montrer que P_1, la contraposée de P, est vraie. Or on sait que P est équivalent à P_1, donc P est vrai.

Exercice 3. Soient deux ensembles finis A et B, on notera dans toute la suite $m = \text{card}(A)$ et $n = \text{card}(B)$.

1. Donner le cardinal des ensembles $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$. [On pourra utiliser les résultats vus en TD sans les redémontrer.]

   Réponse : On sait que pour un ensemble fini X, $\text{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^{\text{card}(X)}$, et donc

$$\text{card}(\mathcal{P}(A \times B)) = 2^{mn} \quad \text{et} \quad \text{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = 2^m \times 2^n$$

2. On fixe $m \geq 3$. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$,

$$2^{mn} > 2^m \times 2^n.$$

Réponse : Initialisation : Pour $n = 2$, il faut vérifier que $2^{2m} > 4 \times 2^m$. Or
$$2^{2m} = 2^m \times 2^m > 4 \times 2^m,$$
puisque $m \geq 3$ et donc $2^m \geq 8 > 4$.
Hérédité : on suppose que $2^{mn} > 2^m \times 2^n$ pour une certaine valeur de $n \geq 2$ et on veut montrer que $2^{m(n+1)} > 2^m \times 2^{n+1}$. Or on a bien
$$2^{m(n+1)} = 2^{mn+m} = 2^{mn} \times 2^m > 2^m \times 2^n \times 2^m > 2^m \times 2^n \times 2 = 2^m \times 2^{n+1}$$
en utilisant l'hypothèse de récurrence et le fait que $m \geq 3$.

On considère dans la suite l'application
$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(A \times B) \\ & & (X, Y) & \mapsto & X \times Y \end{array}$$

3. Est-ce que l'application f est surjective ?
   Réponse : On suppose ici aussi que $m \geq 3$ et $n \geq 2$. Alors on a vu dans les questions précédentes que
   $$\mathrm{card}(\mathcal{P}(A \times B)) = 2^{mn} > 2^m \times 2^n = \mathrm{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)).$$
   Donc d'après le principe des tiroirs, f ne peut pas être surjective.
4. On considère maintenant $A = B = \{1, 2\}$, et donc $m = n = 2$.
   (a) Comparer le cardinal des ensembles $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans ce cas.
   Réponse : En utilisant les formules de la question 1, on trouve dans ce cas
   $$\mathrm{card}(\mathcal{P}(A \times B)) = \mathrm{card}(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) = 16.$$
   (b) Faire la liste des éléments de $f(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$.
   Réponse : Les éléments de $f(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$ sont les suivants : $\emptyset$ (qui correspond à $\emptyset \times Y$ ou $X \times \emptyset$, pour n'importe quel X ou Y), $\{1\} \times \{1\}$, $\{1\} \times \{2\}$, $\{2\} \times \{1\}$, $\{2\} \times \{2\}$, $\{1, 2\} \times \{1\}$, $\{1, 2\} \times \{2\}$, $\{1\} \times \{1, 2\}$, $\{2\} \times \{1, 2\}$, $\{1, 2\} \times \{1, 2\}$.
   Il y a 10 éléments.
   (c) Donner explicitement un élément de $\mathcal{P}(A \times B)$ qui n'est pas de la forme $X \times Y$ avec $X \in \mathcal{P}(A)$ et $Y \in \mathcal{P}(B)$.
   Réponse : On voit que la liste précédente ne contient pas $\{(1, 1), (2, 2)\}$: c'est bien un élément de $\mathcal{P}(A \times B)$, mais qui n'est pas de la forme $f(X, Y)$ pour $(X, Y) \in \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$.

(d) Est-ce que l'application f est injective ?

Réponse : On vient de voir que $f(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)) \neq \mathcal{P}(A \times B)$, ce qui signifie que f n'est pas surjective. Or le cardinal de l'ensemble de départ de f est le même que celui de son ensemble d'arrivée d'après la question 4.a., et on sait dans ce cas que f est injective ssi f est bijective ssi f est surjective. Donc on a aussi montré que f n'est pas injective.
Autre argument possible : on a dit que $f(\emptyset, \{1,2\}) = \emptyset \times \{1,2\} = \emptyset$ et $f(\{1,2\}, \emptyset) = \{1,2\} \times \emptyset = \emptyset$, or $(\emptyset, \{1,2\}) \neq (\{1,2\}, \emptyset)$, donc f n'est pas injective.

Exercice 4. Soit X un ensemble et R une relation sur l'ensemble X. On suppose que R est réflexive, symétrique et antisymétrique. Montrer que R est la relation d'égalité, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in X \ \forall y \in X \ (xRy \Leftrightarrow x = y).$$

Réponse : Supposons que $x = y$. Alors xRy signifie xRx, ce qui est vrai puisque R est réflexive.
Supposons que xRy. Alors on a aussi que yRx puisque R est symétrique. Puis, de xRy et yRx, on déduit $x = y$ puisque R est antisymétrique.
On a donc montré : $\forall x \in X \ \forall y \in X \ (xRy \Leftrightarrow x = y)$.