Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Partiel du 26 octobre 2023

Durée 2h. Les documents et les instruments électroniques sont interdits.

Exercice 1. Soit P un énoncé. Est-ce que les énoncés P d'une part, et (non P) $\Rightarrow P$ d'autre part, sont équivalents ?

Exercice 2. On considère dans tout l'exercice une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit F l'énoncé "la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$" :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists B \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (x \geq B \Rightarrow f(x) \geq A)$$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites de réels, et pour une telle suite v, soit $S(v)$ l'énoncé "la suite v tend vers $+\infty$" :

$$\forall A \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (n \geq n_0 \Rightarrow v_n \geq A)$$

Pour $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on notera $f(u)$ la suite dont le terme de rang n vaut $f(u_n)$. On s'intéresse à l'énoncé

$$P \ : \quad \Big(\forall u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ (S(u) \Rightarrow S(f(u)))\Big) \Rightarrow F$$

1. Quelle est la contraposée de P ? On écrira cette contraposée en utilisant les énoncés S et F sans les développer ; et on la notera P_1.
2. Donner un énoncé équivalent à non F, dans lequel n'apparaît plus le symbole non .
3. Même question pour non $S(v)$.
4. Soit $v \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ v_n \geq n$. Montrer que $S(v)$ est vrai. [On n'utilisera pas les théorèmes de comparaison des suites.]
5. On suppose que F est faux. Montrer qu'il existe une suite $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $S(u)$ est vrai mais $S(f(u))$ est faux.
6. Est-ce que l'énoncé P est vrai ?

TSVP

Exercice 3. Soient deux ensembles finis A et B, on notera dans toute la suite $m = \text{card}(A)$ et $n = \text{card}(B)$.

1. Donner le cardinal des ensembles $\mathcal{P}(A\times B)$ et $\mathcal{P}(A)\times\mathcal{P}(B)$. [On pourra utiliser les résultats vus en TD sans les redémontrer.]
2. On fixe $m \geq 3$. Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \geq 2$,

$$2^{mn} > 2^m \times 2^n.$$

On considère dans la suite l'application

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) & \to & \mathcal{P}(A \times B) \\ & & (X, Y) & \mapsto & X \times Y \end{array}$$

3. Est-ce que l'application f est surjective ?
4. On considère maintenant $A = B = \{1, 2\}$, et donc $m = n = 2$.
   (a) Comparer le cardinal des ensembles $\mathcal{P}(A \times B)$ et $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ dans ce cas.
   (b) Faire la liste des éléments de $f(\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B))$.
   (c) Donner explicitement un élément de $\mathcal{P}(A \times B)$ qui n'est pas de la forme $X \times Y$ avec $X \in \mathcal{P}(A)$ et $Y \in \mathcal{P}(B)$.
   (d) Est-ce que l'application f est injective ?

Exercice 4. Soit X un ensemble et R une relation sur l'ensemble X. On suppose que R est réflexive, symétrique et antisymétrique. Montrer que R est la relation d'égalité, c'est-à-dire que :

$$\forall x \in X\ \forall y \in X\ (xRy \Leftrightarrow x = y).$$