Corrigé de l'Examen du 19 décembre 2023

Exercice 1. Les deux parties A et B sont indépendantes.
A.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \equiv 0$ [4] ou $n^2 \equiv 1$ [4].
   Réponse : On distingue deux cas. Si $n = 2k$ est pair, alors $n^2 = 4k^2 \equiv 0$ [4]. Et si $n = 2k+1$ est impair, alors $n^2 = 4k^2+4k+1 \equiv 1$ [4].
2. Soit un l un nombre entier impair, on suppose qu'il existe m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $l = m^2 + n^2$. Montrer que $l \equiv 1$ [4].
   Réponse : D'après la question précédente, il y a 3 cas possibles :
   - soit m^2 et n^2 sont tous les deux congrus à 0 modulo 4, et dans ce cas $l \equiv 0$ [4]
   - soit ils sont tous les deux congrus à 1 modulo 4, et dans ce cas $l \equiv 2$ [4]
   - soit l'un est congru à 0 modulo 4, et l'autre à 1 modulo 4, et dans ce cas $l \equiv 1$ [4].
   Or dans les deux premiers cas $l = 4k$ ou $l = 4k + 2$ est pair, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc seul le troisième cas est possible : $l \equiv 1$ [4].

B. On donne $193 = 12^2 + 7^2$. Les classes $\overline{n}$ considérées seront toujours dans $\mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$.

1. Montrer que 7 et 193 sont premiers entre eux, et trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $7u + 193v = 1$.
   Réponse : On applique l'algorithme d'Euclide
   $$\begin{aligned} 193 &= 7 \times 27 + 4 \\ 7 &= 4 + 3 \\ 4 &= 3 + 1 \end{aligned}$$
   1 est le dernier reste non-nul donc 193 et 7 sont premiers entre eux.
   Pour obtenir une identité de Bézout, on remonte l'algorithme :
   $$\begin{aligned} 1 &= 4 - 3 \\ &= 4 - (7 - 4) = 4 \times 2 - 7 \\ &= (193 - 7 \times 27) \times 2 - 7 = 193 \times 2 - 7 \times 55 \end{aligned}$$
   Donc $7u + 193v = 1$ pour $u = -55$ et $v = 2$.

2. En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$ tel que $\overline{7} \times z = \overline{1}$.

   Réponse : Dans $\mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$, l'égalité précédente s'écrit $\overline{7} \times \overline{-55} = \overline{1}$ donc $z = \overline{-55}$ convient.

3. En utilisant la question précédente et l'égalité $193 = 12^2 + 7^2$, trouver un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{a}^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

   Réponse : On a : $\overline{12}^2 + \overline{7}^2 = \overline{0}$. En multipliant par $\overline{-55}^2$, on obtient $(\overline{12} \times \overline{-55})^2 + (\overline{7} \times \overline{-55})^2 = \overline{0}$. Or $\overline{7} \times \overline{-55} = \overline{1}$ donc on trouve $\overline{-660}^2 + \overline{1} = \overline{0}$. Donc $a = -660$ convient. On peut aussi prendre $a = 112$ puisque $\overline{112} = \overline{-660}$, ou encore $a = 81$ puisque $\overline{81} = -\overline{112}$ a le même carré que $\overline{112}$.

Dans la suite, a désignera toujours l'entier trouvé à la question précédente. Les questions suivantes peuvent être traitées même si on n'a pas su trouver une valeur pour a.

4. Calculer $\overline{a}^4$.

   Réponse : Par choix de a, $\overline{a}^2 = -\overline{1}$, donc $\overline{a}^4 = (-\overline{1})^2 = \overline{1}$.

5. En déduire que pour tous q et r dans $\mathbb{N}$, $\overline{a}^{4q+r} = \overline{a}^r$.

   Réponse : Pour tous q et r dans $\mathbb{N}$, on écrit :

$$\overline{a}^{4q+r} = (\overline{a}^4)^q \times \overline{a}^r = \overline{1}^q \times \overline{a}^r = \overline{a}^r.$$

6. Montrer que 193 divise $a^{2023} + a$.

   Réponse : Comme $2023 = 4 \times 505 + 3$, on a $\overline{a}^{2023} = \overline{a}^3$ dans $\mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$ d'après la question précédente. On peut donc calculer dans $\mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$:

$$\overline{a^{2023} + a} = \overline{a}^{2023} + \overline{a} = \overline{a}^3 + \overline{a} = \overline{a}(\overline{a}^2 + \overline{1}) = \overline{0}$$

   par choix de a. Donc 193 divise $a^{2023} + a$.

Exercice 2. On rappelle que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On pose $w = 1 + i$.

1. Écrire w sous forme trigonométrique.

   Réponse : On commence par calculer $|w| = \sqrt{2}$. Puis $\frac{w}{|w|} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)$. Donc la forme trigonométrique de w est $w = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

2. Calculer les racines carrées de w sous forme algébrique.

   Réponse : On cherche $z = a + ib$ tel que $z^2 = w$. En développant et en identifiant les parties réelles, les parties imaginaires, et en regardant aussi les modules, on trouve le système :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1 \\ 2ab = 1 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{2} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \\ b = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \\ 2ab = 1 \end{cases}$$

Comme $2ab > 0$, a et b doivent être de même signe, ce qui donne les racines carrées :

$$\pm\Big(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}\Big)$$

3. Calculer les racines carrées de w sous forme trigonométrique.
   Réponse : On cherche $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ tel que $z^2 = w$. En identifiant les modules et les arguments, on trouve :

$$\begin{cases} r^2 = \sqrt{2} \\ 2\theta \equiv \pi/4 \ [2\pi] \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{\sqrt{2}} \\ \theta \equiv \pi/8 \ [\pi] \end{cases}$$

   Donc les racines carrées de w sont

$$\sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8} \text{ et } \sqrt{\sqrt{2}}e^{i9\pi/8}$$

4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
   Réponse : On identifie les formes algébriques et trigonométriques des racines carrées de w trouvées dans les questions précédentes. Comme $0 < \pi/8 < \pi/2$, ses cosinus et sinus sont positifs, et on a donc

$$\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\sqrt{2}}e^{i\pi/8} = \sqrt{\sqrt{2}}(\cos(\pi/8) + i\sin(\pi/8))$$

   On en déduit, en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\cos(\pi/8) = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}}\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

   et de même

$$\sin(\pi/8) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Exercice 3. On rappelle les formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1. Développer $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$.

   Réponse : On utilise la formule du binôme de Newton, et le fait que $(2i)^4 = 16$:

   $$\begin{aligned}\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4 &= \frac{1}{16}\left(e^{i4\theta} - 4e^{i3\theta}e^{-i\theta} + 6e^{i2\theta}e^{-i2\theta} - 4e^{i\theta}e^{-i3\theta} + e^{-i4\theta}\right) \\ &= \frac{1}{16}e^{i4\theta} - \frac{1}{4}e^{i2\theta} + \frac{3}{8} - \frac{1}{4}e^{-i2\theta} + \frac{1}{16}e^{-i4\theta}\end{aligned}$$

2. En déduire une écriture de $(\sin(\theta))^4$ comme une somme de termes de la forme λ, $\mu\cos(m\theta)$ et $\nu\sin(n\theta)$, où λ, μ, ν sont des réels et m, n des entiers.

   Réponse : D'après les formules d'Euler, on vient précisément de calculer $(\sin(\theta))^4$. En regroupant ensemble les exponentielles, et en utilisant encore les formules d'Euler, on trouve

   $$\begin{aligned}(\sin(\theta))^4 &= \frac{3}{8} + \frac{1}{16}(e^{i4\theta} + e^{-i4\theta}) - \frac{1}{4}(e^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) \\ &= \frac{3}{8} + \frac{1}{8}\cos(4\theta) - \frac{1}{2}\cos(2\theta)\end{aligned}$$

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A l'ensemble des polynômes non-nuls dans $\mathbb{K}[X]$. On définit la relation $\sim$ sur A par :

$$P \sim Q \text{ ssi } \exists \lambda \in \mathbb{K},\ Q = \lambda P$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur A.

   Réponse : Réflexivité : comme $P = 1 \times P$, $P \sim P$
   Symétrie : supposons que $P \sim Q$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $Q = \lambda P$. Notons que comme Q est supposé non-nul (P et Q sont dans A), $\lambda \neq 0$. On peut donc écrire $P = \frac{1}{\lambda}Q$, donc $Q \sim P$.
   Transitivité : supposons que $P \sim Q$ et $Q \sim R$, il existe donc λ et μ dans $\mathbb{K}$ tels que $Q = \lambda P$ et $R = \mu Q$. On en déduit que $R = (\mu\lambda)P$, et donc $P \sim R$.

2. Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme non-nul dans $\mathbb{K}[X]$, de degré n et de coefficient dominant a_n ($a_n \neq 0$). Montrer qu'il existe un unique polynôme non-nul Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P \sim Q$ et que le coefficient dominant de Q est 1.

   Réponse : On cherche Q tel que $P \sim Q$, il doit donc s'écrire $Q = \lambda P = \lambda a_n X^n + \ldots + \lambda a_0$, avec $\lambda \neq 0$ puisque $Q \neq 0$. La condition nécessaire et suffisante pour que le coefficient dominant de Q soit 1 est que $\lambda a_n = 1$, ce qui est obtenu pour une unique valeur de $\lambda = \frac{1}{a_n}$.

Exercice 5. Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3$.

1. Trouver une racine évidente de P.

   Réponse : On constate que $P(-1) = 0$ donc -1 est une racine évidente de P.

2. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

   Réponse : On sait donc par le cours que P est divisible par $X+1$, et on peut trouver le quotient en faisant la division euclidienne. On trouve après calculs $P(X) = (X+1)(X^2 - 3X + 3)$. De plus, le discriminant de $X^2 - 3X + 3$ est $\Delta = -3 < 0$, donc $X^2 - 3X + 3$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, donc $P(X) = (X+1)(X^2 - 3X + 3)$ est une factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

3. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

   Réponse : Factorisons $X^2 - 3X + 3$ dans $\mathbb{C}[X]$ en trouvant ses racines : on a déjà vu que $\Delta = -3 = (i\sqrt{3})^2$, donc les racines sont $\frac{3 \pm i\sqrt{3}}{2}$. On en déduit la factorisation de P en facteurs irréductibles (car de degré 1) :

$$P(X) = (X+1)(X - \frac{3+i\sqrt{3}}{2})(X - \frac{3-i\sqrt{3}}{2}).$$