Université Paris Saclay **MDD 102**
L1S1 **Algèbre**

Examen du 19 décembre 2023

Durée 2h. Les documents et les instruments électroniques sont interdits.

Exercice 1. Les deux parties A et B sont indépendantes.
A.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^2 \equiv 0$ [4] ou $n^2 \equiv 1$ [4].
2. Soit un l un nombre entier impair, on suppose qu'il existe m et n dans $\mathbb{N}$ tels que $l = m^2 + n^2$. Montrer que $l \equiv 1$ [4].

B. On donne $193 = 12^2 + 7^2$. Les classes $\overline{n}$ considérées seront toujours dans $\mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$.

1. Montrer que 7 et 193 sont premiers entre eux, et trouver u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $7u + 193v = 1$.
2. En déduire qu'il existe $z \in \mathbb{Z}/193\mathbb{Z}$ tel que $\overline{7} \times z = \overline{1}$.
3. En utilisant la question précédente et l'égalité $193 = 12^2 + 7^2$, trouver un entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{a}^2 + \overline{1} = \overline{0}$.

Dans la suite, a désignera toujours l'entier trouvé à la question précédente. Les questions suivantes peuvent être traitées même si on n'a pas su trouver une valeur pour a.

4. Calculer $\overline{a}^4$.
5. En déduire que pour tous q et r dans $\mathbb{N}$, $\overline{a}^{4q+r} = \overline{a}^r$.
6. Montrer que 193 divise $a^{2023} + a$.

Exercice 2. On rappelle que $\cos(\pi/4) = \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. On pose $w = 1+i$.

1. Écrire w sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines carrées de w sous forme algébrique.
3. Calculer les racines carrées de w sous forme trigonométrique.
4. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.

TSVP

Exercice 3. On rappelle les formules d'Euler

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

1. Développer $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$.
2. En déduire une écriture de $(\sin(\theta))^4$ comme une somme de termes de la forme λ, $\mu\cos(m\theta)$ et $\nu\sin(n\theta)$, où λ, μ, ν sont des réels et m, n des entiers.

Exercice 4. Dans cet exercice, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit A l'ensemble des polynômes non-nuls dans $\mathbb{K}[X]$. On définit la relation $\sim$ sur A par :

$$P \sim Q \text{ ssi } \exists\lambda \in \mathbb{K},\ Q = \lambda P$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur A.
2. Soit $P = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0$ un polynôme non-nul dans $\mathbb{K}[X]$, de degré n et de coefficient dominant a_n ($a_n \neq 0$). Montrer qu'il existe un unique polynôme non-nul Q dans $\mathbb{K}[X]$ tel que $P \sim Q$ et que le coefficient dominant de Q est 1.

Exercice 5. Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 + 3$.

1. Trouver une racine évidente de P.
2. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Factoriser $P(X)$ en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.