université PARIS-SACLAY | IUT DE SCEAUX

Traitement numérique des données

Programmation linéaire

R5.04

PARTIE « INFO »

Evangelos BAMPAS

evangelos.bampas@universite-paris-saclay.fr

Organisation et évaluation

- Deux parties distinctes :
  - Programmation linéaire (modélisation, résolution graphique, solveur Excel)
    - 2h Amphi + 3 séances de TD
  - Bases de données (Langage SQL et Microsoft Access)
    - 2h Amphi + 3 séances de TD
- Évaluation :
  - Contrôle commun (60 %)
  - Rendus TD Programmation linéaire (20 %)
  - Rendus TD Bases de données (20 %)
  - <u>Le contrôle commun porte sur les deux parties !</u>

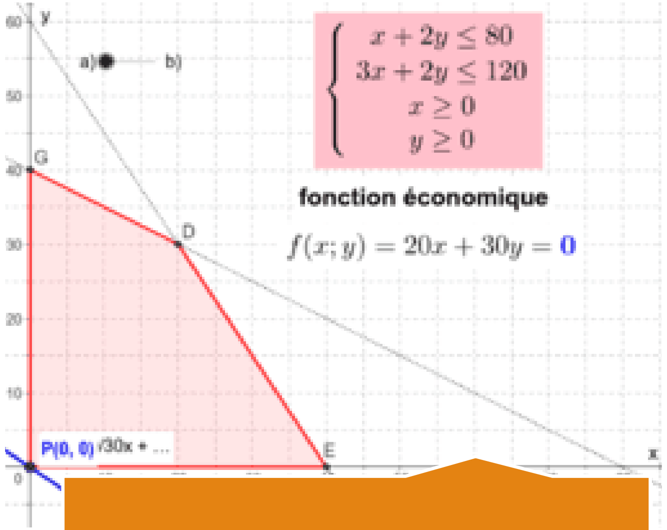
Espace de cours eCampus

- GEA2-FI - R5.04 - Traitement numérique des données-S5 (2024-2025)
  - Mise à disposition des supports pour la partie « INFO »
  - Courriel avec le lien d’auto-inscription à venir
    - Liste des adresses de courriel des étudiants incomplètes

Contexte

Mathématiques appliquées

Sciences de gestion
(Recherche opérationnelle)



Programmation linéaire

Programmation linéaire

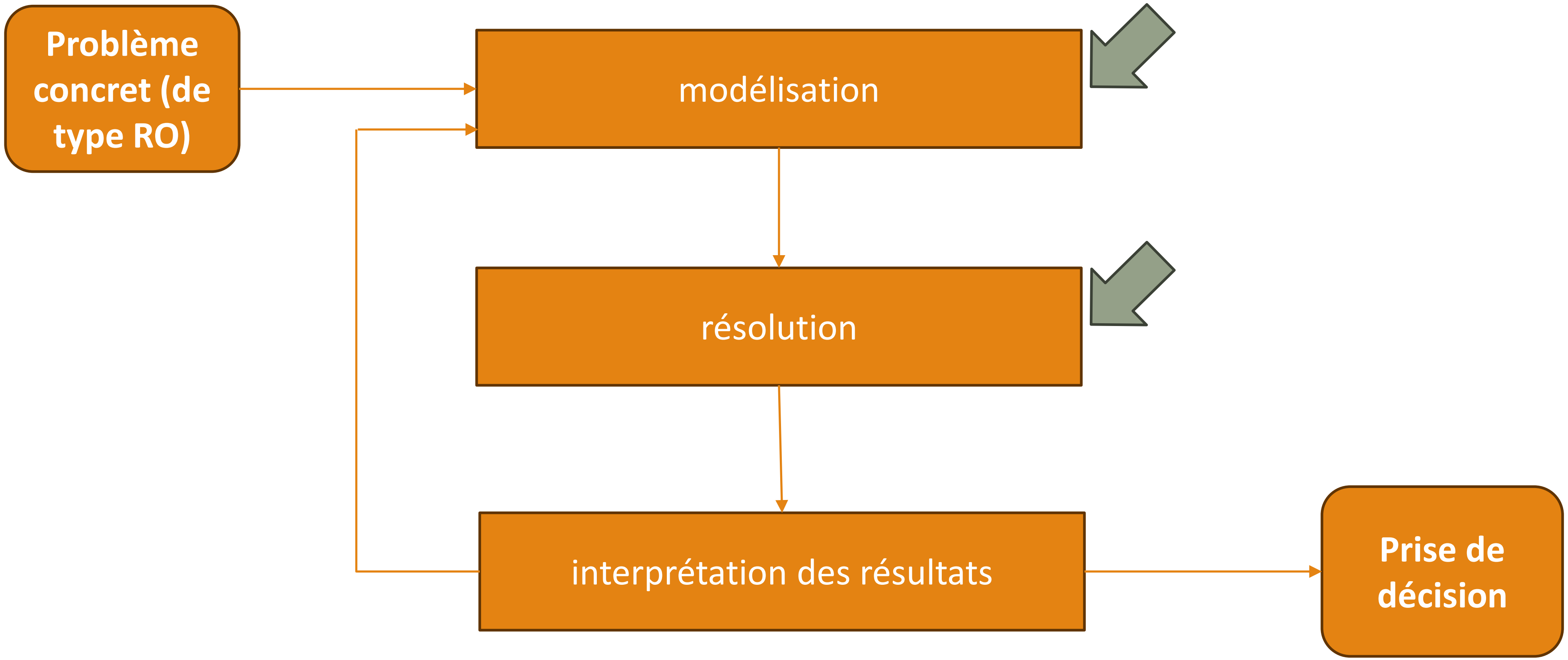
Un ensemble de méthodes nous permettant d'optimiser une fonction mathématique linéaire (appelée « fonction objectif » ou « fonction économique »), en tenant compte de contraintes linéaires, imposées sur les variables de cette fonction.

Par exemple :

- Choisir les quantités de différents produits à fabriquer, afin de maximiser le bénéfice, tenant compte des disponibilités des machines et des ouvriers.
- Établir une campagne de publicité optimale, tenant compte du budget disponible, du coût de publication dans les différents supports (presse, radio, télévision, réseaux sociaux), et de l'efficacité estimée de chaque support.

- Plein d'autres applications en logistique, gestion de projets, gestion de production, planification, investissement, …

Un outil d’aide à la décision



Modélisation mathématique

- Écriture du problème dans le langage mathématique.
  - Identifier les variables
  - Écrire les contraintes sous forme mathématique
  - Exprimer la fonction économique en termes des variables
- Résultat : Programme linéaire (système d'inéquations et d'équations qui permet de calculer la solution optimale).

Résolution du programme linéaire

- Calculer les valeurs des variables qui permettent d'obtenir la valeur optimale de la fonction économique.
  - Tenant toujours compte des contraintes.

- Plusieurs méthodes :
  - Résolution graphique
  - Résolution à l'aide de logiciels : Solveur Excel, CPLEX, Mathematica, …

Exemple d'un programme linéaire et terminologie

- Max. $Z = 350\, x_1 + 300\, x_2 - 10\, y$
- Sous les contraintes :
  - $x_1 + x_2 \leq 200$
  - $9\, x_1 + 6\, x_2 \leq 1566$
  - $y \geq 100$
  - $x_1, x_2 \geq 0$

x_1, x_2, y : variables de décision

fonction économique ($Z = 350\, x_1 + 300\, x_2 - 10\, y$) et objectif : Max ou Min

contraintes

solution réalisable : une affectation de valeurs à (x_1, x_2, y), de manière à vérifier **toutes** les contraintes

domaine réalisable : ensemble des solutions réalisables

solution optimale : une solution réalisable qui rend la fonction économique maximale (ou minimale, selon l'objectif)

- Dans un programme linéaire : La fonction économique et toutes les contraintes sont toujours linéaires.
- Typiquement (mais pas toujours) : les variables sont positives (ou 0).

Exemple 1 : plan de production

- Une entreprise fabrique des câbles en cuivre de 5 et 10 mm de diamètre, sur une ligne de production unique. Les contraintes ci-dessous sont imposées :
  - Le cuivre disponible permet de produire 21000 mètres de câble de 5 mm par semaine.
  - Un mètre de câble de 10 mm consomme 4 fois plus de cuivre qu'un mètre de câble de 5 mm.
- En raison de la demande, la production hebdomadaire de câbles de 5 mm est limitée à 15000 mètres, et la production de câbles de 10 mm ne doit pas dépasser 40 % de la production totale.
- Les câbles sont respectivement vendus 50 et 300 euros le mètre.
- **Quelle quantité de chaque type de câble doit fabriquer l'entreprise pour maximiser son chiffre d'affaires hebdomadaire ?**

Modélisation

- Démarche
  - Choisir les variables (les valeurs que l'on cherche à déterminer, inconnus)
  - Exprimer les contraintes (compréhension du problème à résoudre)
  - Exprimer la fonction économique (ce que l'on cherche à optimiser)

- Dans l'exemple : nous introduisons **deux** variables de décision.
  - x_1 : combien de mètres de câble de diamètre 5 mm fabriquer chaque semaine ?
  - x_2 : combien de mètres de câble de diamètre 10 mm fabriquer chaque semaine ?

Modélisation : contraintes

- Contrainte : matière première

$$x_1 + 4x_2 \leq 21000$$

- Contrainte : production de câble de 5 mm

$$x_1 \leq 15000$$

- Contrainte : production de câble de 10 mm

$$x_2 \leq \frac{40}{100}(x_1 + x_2), \text{ ou } -40x_1 + 60x_2 \leq 0$$

- Contrainte : impossible de fabriquer des quantités négatives

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Modélisation : fonction économique

- Le plan de production (x_1, x_2) donne un chiffre d'affaires hebdomadaire de :

$$Z = 50x_1 + 300x_2$$

- Objectif : Maximiser Z

Modèle final

- Pour maximiser le chiffre d'affaires hebdomadaire, il faut déterminer la solution optimale (valeurs de x_1, x_2) du programme linéaire suivant :

Maximiser $Z = 50x_1 + 300x_2$

Sous les contraintes :

$$x_1 + 4x_2 \leq 21000$$

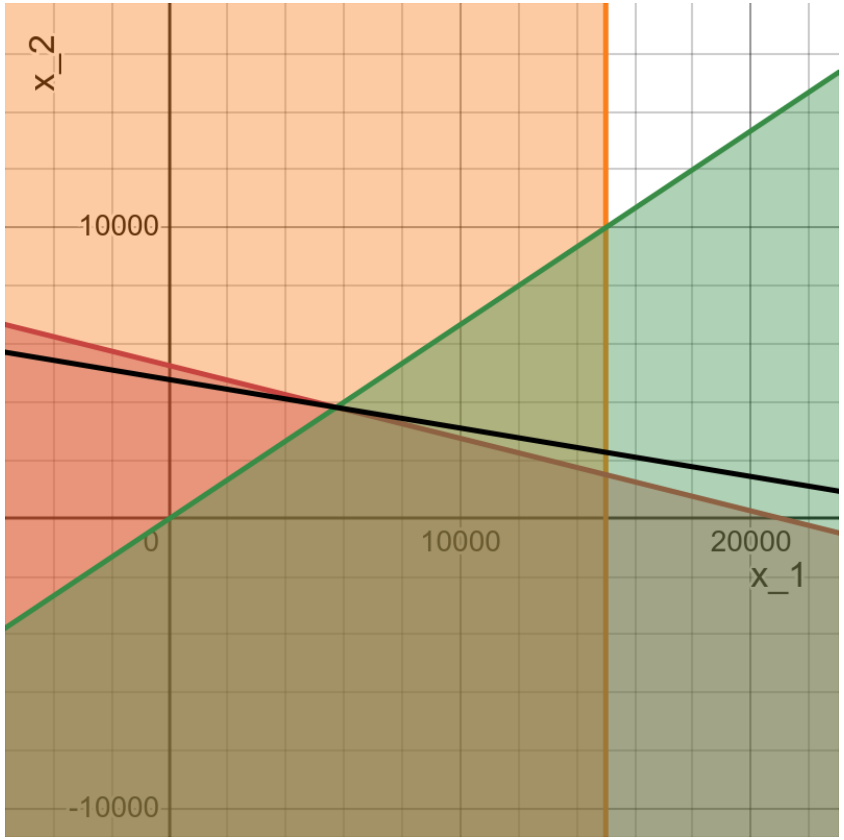
$$x_1 \leq 15000$$

$$-40x_1 + 60x_2 \leq 0$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Résolution graphique

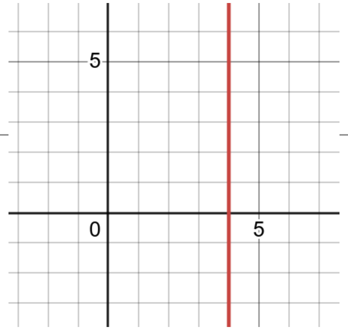
- Pratique uniquement pour des programmes linéaires à 2 variables.
- Nous travaillons sur le plan x_1–x_2.
  - « Solutions » (réalisables ou non) : points.
  - Contraintes : demi-plans.
  - Domaine réalisable : intersection de tous les demi-plans correspondant à des contraintes.
  - Fonction économique : ligne droite « glissante »
  - Solution optimale : la dernière extrémité du domaine réalisable touchée par la fonction économique avant qu'elle quitte le domaine réalisable.



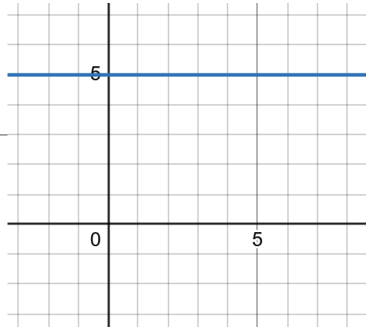
Lien desmos

Tracer une ligne droite

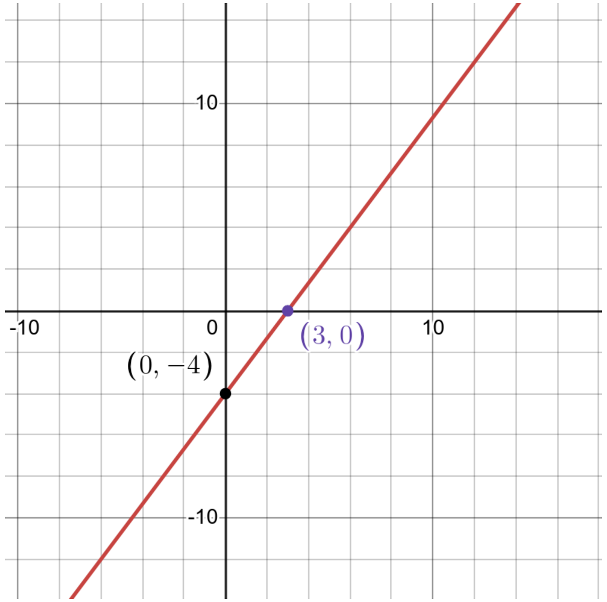
- Cas particuliers sur le plan x-y :
  - **Équation sans y** (ligne verticale). Exemple : $x = 4$
  - **Équation sans x** (ligne horizontale). Exemple : $y = 5$
- **Cas général**. Exemple : $4x - 3y = 12$
  - Il suffit de déterminer <u>deux points quelconques</u> sur la ligne droite.
  - On suppose $x = 0$, et on trouve y. Premier point : $(0, -4)$
  - On suppose $y = 0$, et on trouve x. Deuxième point : $(3{,}0)$
  - On trace la ligne droite qui passe par les deux points ainsi déterminés.



$x = 4$



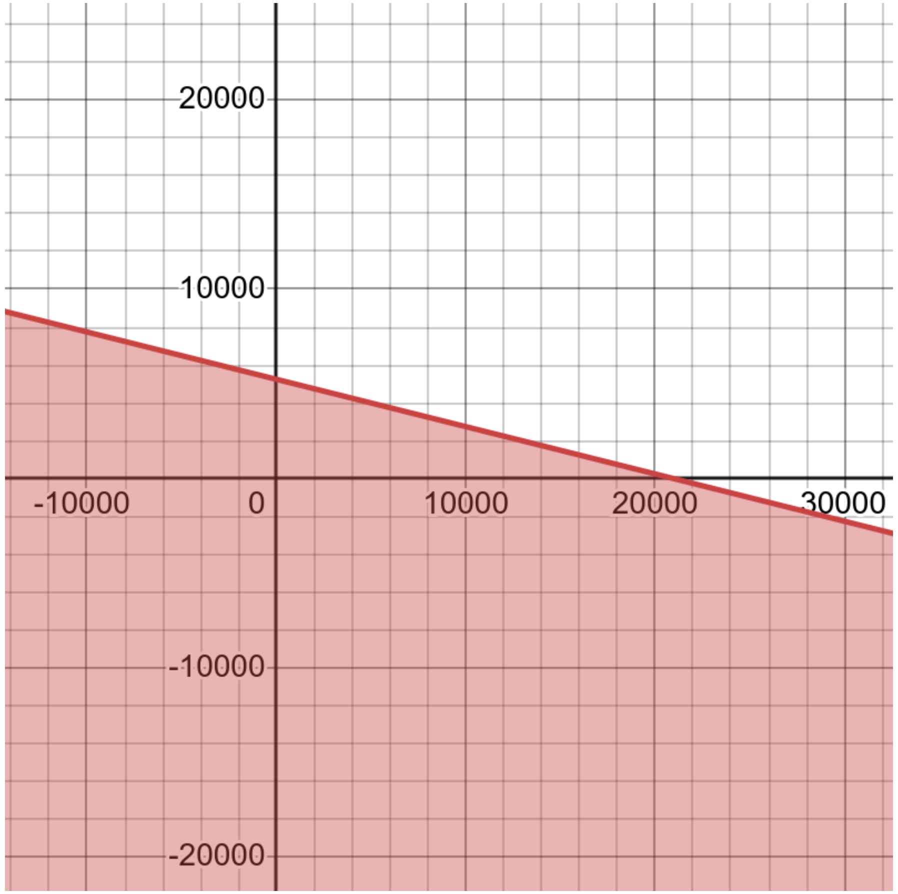
$y = 5$



$4x - 3y = 12$

Déterminer le demi-plan d'une contrainte (inéquation)

- Exemple : $x_1 + 4\,x_2 \leq 21000$
- Méthode :
  - On considère la contrainte avec l'inéquation remplacée par une équation : $x_1 + 4\,x_2 = 21000$
  - On trace la ligne droite qui correspond à cette équation.
  - On choisit un point quelconque en dehors de la ligne droite. Typiquement (0,0). *Si (0,0) tombe sur la ligne, alors un autre point qui convient pour les calculs*.
  - Si le point valide l'inéquation, alors tous les points sur le même demi-plan valident l'inéquation.
  - Si le point ne valide pas l'inéquation, alors il faut choisir l'autre demi-plan.



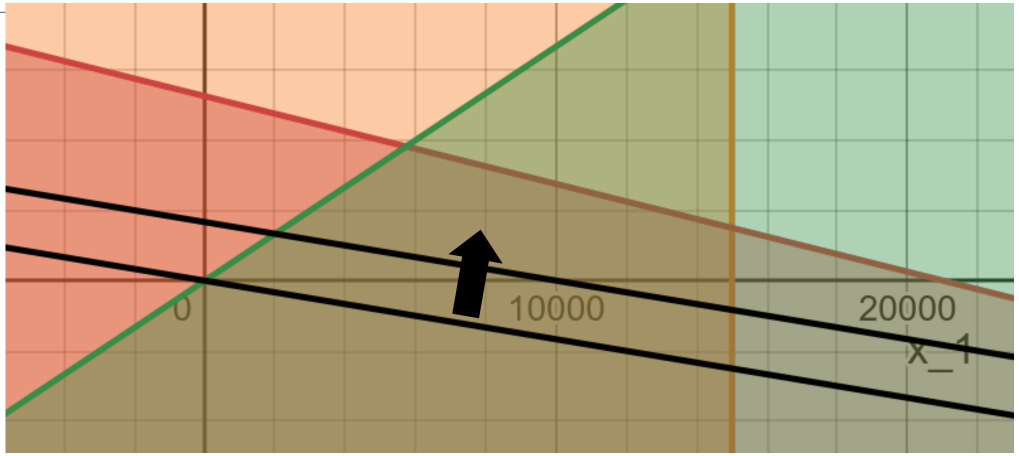
Trouver la solution optimale

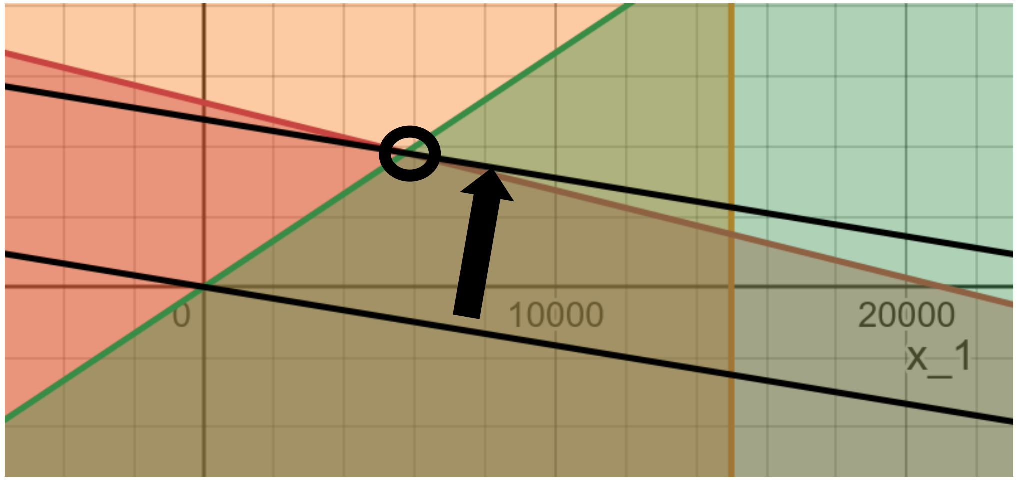
- On trace les lignes droites qui correspondent à **deux valeurs** de la fonction économique : typiquement $Z = 0$ et une autre. Ici on va choisir $Z = 500000$.
  - Cela donne deux équations de lignes à tracer :

$$50x_1 + 300x_2 = 0$$
$$50x_1 + 300x_2 = 500000$$

- La direction de déplacement lorsqu'on augmente Z nous indique la direction dans laquelle il faut « glisser » la ligne de la fonction économique pour trouver la solution optimale.

- La solution optimale est le **dernier point** (toujours une extrémité) du domaine réalisable touché par la ligne de la fonction économique, avant qu'elle ne quitte le domaine.





Calculer la valeur de la solution optimale

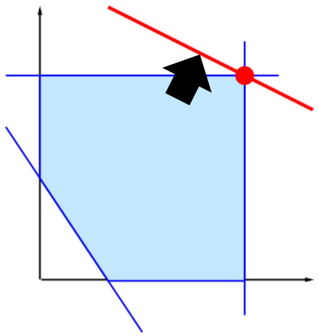
- Il suffit de calculer le point d'intersection des deux contraintes qui se croisent sur le point optimal (solution optimale), transformées en équations ($=$), puis calculer la valeur de la fonction économique pour cette solution.
- Dans l'exemple, on a :

$$-40x_1 + 60x_2 = 0$$
$$x_1 + 4x_2 = 21000$$

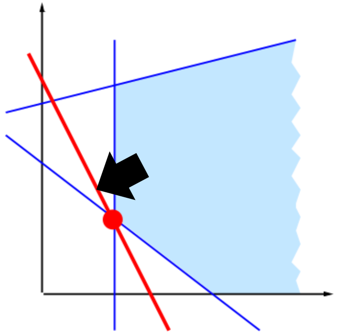
- La solution de ce système d'équations linéaires est : $x_1 = 5727{,}27$, $x_2 = 3818{,}18$, ce qui nous donne les quantités de câbles à fabriquer pour atteindre le chiffre d'affaires optimal.
- Finalement, on peut calculer le chiffre d'affaires optimal en remplaçant les valeurs de (x_1, x_2) dans la fonction économique Z :

$$Z = 50x_1 + 300x_2 = 50 \cdot 5727{,}27 + 300 \cdot 3818{,}18 = 1431817{,}5 \text{ €}$$

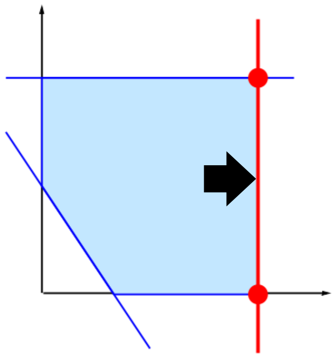
Solutions optimales : différents cas



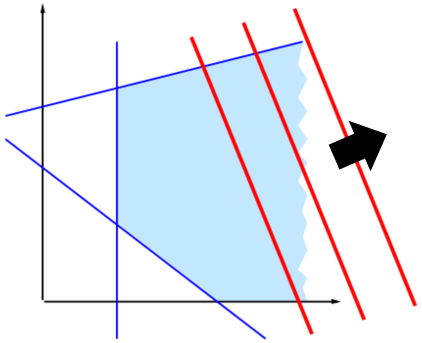
Domaine réalisable **fermé** et **une seule** solution optimale



Domaine réalisable **ouvert** et **une seule** solution optimale



Domaine réalisable **fermé** et un nombre **infini** de solutions optimales



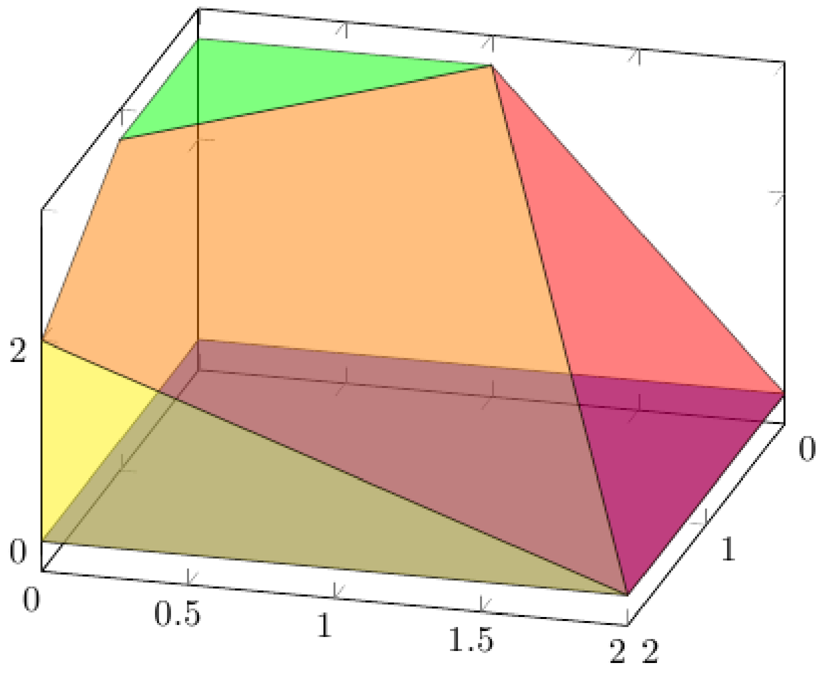
Domaine réalisable **ouvert** et **aucune** solution optimale

Résolution graphique : la démarche (résumé)

- Rappel : Pratique uniquement pour des programmes linéaires à 2 variables.
- **Pour chaque contrainte** (inéquation) :
  - Tracer la ligne droite qui correspond à la contrainte, avec le symbole d'inégalité remplacé par = .
  - Retenir le bon demi-plan.
- Identifier le **domaine réalisable** comme l'intersection des demi-plans de toutes les contraintes.
- Tracer les lignes droites qui correspondent à deux valeurs de la fonction économique, et déterminer la **direction de croissance** de la fonction économique.
- À l'aide d'une règle, déterminer **le dernier point (solution optimale) du domaine réalisable** touché par la ligne droite de la fonction économique lorsqu'elle se déplace dans la direction de croissance.
- Identifier les deux contraintes qui se croisent sur le point de la solution optimale. Résoudre le système d'équations (remplacer $\leq$ et $\geq$ par $=$) afin de **calculer les valeurs des variables dans la solution optimale**.
- Remplacer ces valeurs dans la fonction économique pour **trouver la valeur optimale**.

Résolution graphique si 3 variables ou plus

- Chaque variable ajoute une dimension dans l'espace des solutions réalisables.
- Le domaine réalisable devient ainsi un polyèdre (si 3 variables), ou plus généralement un polytope (à plusieurs dimensions).
- La méthode présentée n'est pas pratique à partir de 3 variables.



Exemple 2 : problème de transport

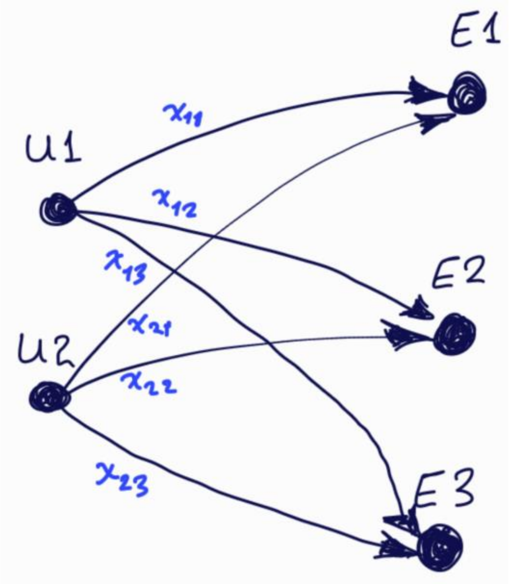
- Une entreprise disposant de 2 lieux de production (U1, U2) doit transporter ses produits finis vers 3 entrepôts régionaux (E1, E2, E3).
- Chaque unité de production a une capacité limitée :
  - U1 est limitée à 100 (mesuré en milliers de tonnes). U2 est limitée à 150.
- Chaque entrepôt a exprimé une demande qui doit être satisfaite :
  - E1 : 50, E2 : 70, E3 : 80.
- Le coût de transport par tonne de l'usine i (i = 1,2) à l'entrepôt j (j = 1,2,3) est donné dans le tableau suivant :

	E1	E2	E3
U1	4	3	6
U2	3	5	3

- **Quelles quantités faut-il transporter de chaque usine vers chaque entrepôt, de manière à minimiser le coût total de transport ?**

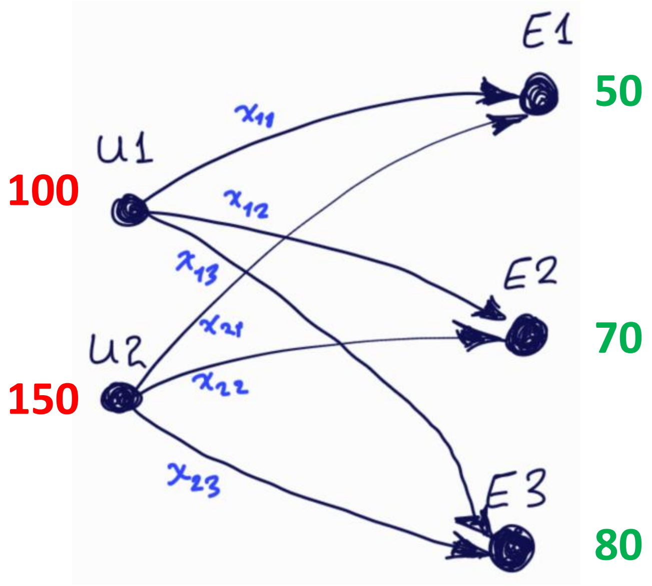
Modélisation : variables

- Nous devons décider quelle quantité transporter **de chaque usine vers chaque entrepôt**.
- Nous introduisons six variables x_{ij} (pour $i = 1,2$ et $j = 1,2,3$), représentant la quantité à transporter de l'usine i vers l'entrepôt j.



Modélisation : contraintes

- Capacité de production (usines) :
  - $x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$
  - $x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$
- Demande régionale (entrepôts) :
  - $x_{11} + x_{21} \geq 50$
  - $x_{12} + x_{22} \geq 70$
  - $x_{13} + x_{23} \geq 80$
- Quantités transportées positives :
  - $x_{ij} \geq 0$ pour tout i, j



Modélisation : fonction économique

	E1	E2	E3
U1	4	3	6
U2	3	5	3

- On souhaite minimiser le coût total de transport.
- Sur chaque trajet usine-entrepôt, le coût est proportionnel aux quantités transportées.
- Le coût total s'écrit :

$$Z = 4x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}$$

- Objectif : Minimiser le coût total.

Modèle final

- Pour minimiser le coût total de transport, il faut déterminer la solution optimale du programme linéaire suivant :

Minimiser $Z = 4x_{11} + 3x_{12} + 6x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 3x_{23}$

Sous les contraintes :

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 100$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 150$$
$$x_{11} + x_{21} \geq 50$$
$$x_{12} + x_{22} \geq 70$$
$$x_{13} + x_{23} \geq 80$$
$x_{ij} \geq 0$ pour tout i, j