Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 2 : Intégrale des fonctions positives (Partie 1)

Correction 1.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque x^2 est positif, la suite $(-x^2/n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers 0. La fonction exp est croissante et continue, donc la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et tend vers $\exp(0) = 1$. Par conséquent la suite de fonctions (f_n) est croissante et converge simplement vers la fonction constante 1.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque x^2 est positif, la suite $(-nx^2)$ est décroissante. La fonction exp est croissante, donc la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. La suite de fonctions (g_n) est donc décroissante.
3. Pour tout $n \geq 0$ la fonction h_n est à valeurs strictement positives. Mais pour $x \neq 0$ fixé, quand $n \to +\infty$, on a $h_n(x) \to 0$ par croissances comparées. La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut donc pas être croissante.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$. Puisque $|x|$ est positif, la suite $(k_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante donc la suite (k_n) est croissante. Si $x = 0$, alors la suite $(k_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est identiquement nulle, et converge donc vers 0. Si $x \neq 0$, la suite $(k_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$. La limite simple de la suite de fonctions (k_n) est donc la fonction $k : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ définie par
$$k : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$
5. On a $\ell_{n+1} - \ell_n = \mathbb{1}_{[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}]}$ donc la suite de fonctions positives (ℓ_n) est croissante, et elle converge donc vers une fonction $\ell : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$.
Puisque $\ell_n(0) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ell(0) = +\infty$.
Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Pour $k \leq \frac{1}{|x|}$, on a $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}(x) = 1$ et pour $k > \frac{1}{|x|}$, on a $\mathbb{1}_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}(x) = 0$. Par conséquent, la suite $(\ell_n(x))$ est constante égale à $\left\lfloor \frac{1}{|x|} \right\rfloor$ (ce symbole désignant la partie entière de $\frac{1}{|x|}$) dès que $n > \frac{1}{|x|}$. On trouve donc que $\ell : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ est définie par
$$x \mapsto \begin{cases} +\infty & \text{si } x = 0 \\ \left\lfloor \frac{1}{|x|} \right\rfloor & \text{sinon.} \end{cases}$$

Correction 2. Il y a deux difficultés ici, extraire un point du domaine et traiter les valeurs infinies. On commence par le cas ou f est à valeurs finies et on remarque que $\mathbb{1}_{[a,b]} = \mathbb{1}_{\{a\}} + \mathbb{1}_{]a,b[} + \mathbb{1}_{\{b\}}$. On en déduit en utilisant la linéarité de l'intégrale que
$$\int_{[a,b]} f \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[a,b]} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{a\}} + \mathbb{1}_{]a,b[} + \mathbb{1}_{\{b\}} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{a\}} \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{]a,b[} \mathrm{d}\lambda + \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{b\}} \mathrm{d}\lambda.$$
On utilise alors que $\int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{\{a\}} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(a) \mathbb{1}_{\{a\}} \mathrm{d}\lambda = f(a) \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{a\}} \mathrm{d}\lambda = f(a)\lambda(\{a\}) = 0$, et de même en b, pour en déduire que $\int_{[a,b]} f \mathrm{d}\lambda = \int_{]a,b[} f \mathrm{d}\lambda$.

Si f prends la valeur $+\infty$ en a (similairement en b) on ne peut pas sortir $f(a)$ si facilement de l'intégrale. On approche alors f par la suite de fonction f_n définit par

$$f_n(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ n & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les suites $n \to f_n \mathbb{1}_{[a,b]}$ et $n \to f_n \mathbb{1}_{]a,b[}$ sont donc des suites croissantes de fonctions positives. Le théorème de convergence monotone s'applique. En combinant cela avec le résultat précédent pour f_n on obtient que $\int_{[a,b]} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a,b]} f_n \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{]a,b[} f_n \mathrm{d}\lambda = \int_{]a,b[} f \mathrm{d}\lambda$.

Correction 3. Cet exercice est dans le même état d'esprit et l'objectif est d'appliquer le théorème de convergence monotone. On réécrit $\int_{[0,n]} f \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0,n]} \mathrm{d}\lambda = \int_{\mathbb{R}} f_n \mathrm{d}\lambda$ avec $f_n = f \mathbb{1}_{[0,n]}$. Comme la suite $n \to \mathbb{1}_{[0,n]}$ est croissante, convergente simplement vers $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$ et que f est positive on a que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite croissante de fonctions positives convergent simplement vers f. Le théorème de convergence monotone entraine $\lim_{n\to\infty} \int_{[0,n]} f \mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = \int_{\mathbb{R}} f \mathbb{1}_{[0,+\infty[} \mathrm{d}\lambda = \int_{[0,+\infty[} f \mathrm{d}\lambda$. La deuxième question se traite de la même manière en remarquant que $n \mapsto [1/n, 1]$ est une suite de fonction croissante positive convergent simplement vers $[0, 1]$.

Correction 4.

1. La suite (A_n) est une suite croissante de parties de $\mathbb{R}$ de réunion A. Par conséquent (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_A$.
2. Par linéarité de l'intégrale, on sait que $\int f_n \mathrm{d}\lambda = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme somme fini de mesure d'ensemble de mesures nulles (des singletons). Ainsi, par le théorème de convergence monotone (la suite (f_n) est une suite croissante de fonctions positives convergeant simplement vers $\mathbb{1}_A$), on a
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n = 0.$$

Correction 5.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, on a $f_n(x) = 0$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, alors $\sqrt{x} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (car la fonction racine est croissante). D'où $\frac{\sqrt{x}}{n} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Comme la fonction cosinus est positive sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, on a bien $f_n(x) \geq 0$. Donc $f_n \geq 0$.
2. Soit $x \in \mathbb{N}^*$. Si $x \notin \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, on a $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Donc $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, alors $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{n} = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) = 1$ (car cos est continue et $\cos(0) = 1$). Ainsi $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 1$. Donc (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]}$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x \notin \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$, on a $f_n(x) = f_{n+1}(x) = 0$. Si $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ alors $0 \leq \frac{x}{n+1} \leq \frac{x}{n} \leq \frac{\pi}{2}$. Comme la fonction cosinus est décroissante sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$, il vient $f_n(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right) \leq \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n+1}\right) = f_{n+1}(x)$. Donc (f_n) est croissante.
4. La suite (f_n) est une suite croissante de fonctions mesurables positives. Cette suite converge simplement vers $\mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]}$. Par le théorème de convergence monotone $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)$ converge et a pour limite $\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]} d\lambda = \frac{\pi^2}{4}$ (par normalisation de l'intégrale de Legesgue).

Correction 6.

1.

2. Comme les fonctions u_n sont positives, on sait que la série converge vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$. Il nous reste à montrer que f est toujours finie. Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors $u_n(x) = 0$ pour tout n donc $f(x) = 0$. Si $x > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq x < n+1$. Alors, pour tout $m \neq n$, on a $x \notin [m, m+1[$ et donc $x \notin \left[m, m + \frac{1}{m^3}\right[$ d'où $u_m(x) = 0$. Ainsi $f(x) = u_n(x) \in [0, \infty[$.

3.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \geq 0$. Par conséquent, le corollaire du théorème de convergence monotone pour les séries s'applique et

$$\int_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda = \sum_{n \geq 1} \int_{\mathbb{R}} u_n \mathrm{d}\lambda = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

Donc f est intégrable.

5. C'est faux et f est un contre-exemple.

Correction 7. La suite (f_n) n'est pas une suite croissante : $([n, +\infty[)$ est une suite décroissante de parties de $\mathbb{R}$ donc (f_n) est décroissante. La conclusion du théorème n'est d'ailleurs pas vérifiée car les f_n sont toutes d'intégrale infinie mais que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle qui est d'intégrale nulle...

Correction 8.

1. Par la proposition 1.30 du cours, comme $([-n, n])_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de parties de réunion $\mathbb{R}$, on a convergence simple monotone de $\left(\mathbb{1}_{[-n,n]}\right)$ vers $1 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}}$. Il n'y a pas convergence uniforme car $1 - \mathbb{1}_{[-n,n]} = \mathbb{1}_{]-\infty,-n]} + \mathbb{1}_{[n,+\infty[}$ a pour suprémum 1, indépendamment de n. En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par normalisation de l'intégrale,

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 2n.$$

Par conséquent la suite des intégrales converge vers $+\infty$, qui est l'intégrale de la limite. On aurait pu le prévoir en utilisant le théorème de convergence monotone.

2. Puisque $\|g_n\|_\infty = n^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a convergence uniforme (donc simple) vers 0. Par contre, $\int g_n \mathrm{d}\lambda = 2$ indépendamment de n, donc la suite des intégrales converge (vers 2), mais pas vers l'intégrale de la limite (qui est nulle).

3. La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers 0. En effet, fixons $x \in \mathbb{R}$. Dès que $n > |x|$, on a $h_n(x) = 0$. Par conséquent, $(h_n(x))$ converge vers 0 dans n tend vers l'infini. Par contre la convergence n'est pas uniforme car $\|h_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a $\int h_n \mathrm{d}\lambda = 1$, donc la suite des intégrales converge (vers 1), mais pas vers l'intégrale de la limite simple (qui est nulle).

4. Pour tout $x \neq 0$, la suite $(k_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang (dès que $n > \frac{1}{|x|}$). En $x = 0$, $(k_n(x))$ tend vers $+\infty$. On a donc convergence simple vers $+\infty \mathbb{1}_{\{0\}}$; cette convergence ne peut pas être uniforme puisque la limite n'est pas bornée. L'intégrale de la limite est 0, mais $\int k_n \mathrm{d}\lambda = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite des intégrales converge (vers 1), mais pas vers l'intégrale de la limite.

Correction 9.

1. On a convergence uniforme vers 0 car $\|f_n\|_\infty = n^{-2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\int f_n \mathrm{d}\lambda = \frac{2}{n}$ et la suite des intégrales converge vers l'intégrale de la limite, à savoir 0.

2. Comme la suite (h_n) de l'exercice précédent, la suite (g_n) converge simplement, mais pas uniformément, vers 0 (la preuve est identique). Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int g_n \mathrm{d}\lambda = n$, donc la suite des intégrales tend vers $+\infty$, ce qui n'est pas l'intégrale de la limite (qui est nulle).
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\|h_n\|_\infty = n^{-1}$ donc la suite h_n converge uniformément (et, a fortiori, simplement) vers 0. Par ailleurs $\int h_n = n^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc la suite des intégrales converge vers l'intégrale de la limite, à savoir 0. Attention : la convergence des intégrales vers la limite des intégrales ne découle ici d'aucun théorème général, les fonctions ne "vivant pas toutes sur un même segment".
4. Comme pour la suite (k_n) de l'exercice précédent, pour tout $x \neq 0$ on a convergence simple vers 0, et quand $x = 0$ la suite $(k_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est constante égale à 1. La limite simple est $\mathbb{1}_{\{0\}}$, et la convergence n'est pas uniforme puisque $\|k_n - \mathbb{1}_{\{0\}}\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On a cependant $\int k_n \, d\lambda = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, qui tend vers 0, i.e. vers l'intégrale de la limite.

Correction 10.

1. La suite f_n est définie sur une succession d'intervalles de plus en plus grands. Pour n fixé on échange l'intégration et la somme pour obtenir $\int f_n \mathrm{d}\lambda = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}(2^{k+1} - 2^k) = \frac{n+1}{2}$
2. f est une fonction décroissante donc pour tout $x \in [2^k, 2^{k+1}]$ on a $f(x) \geq f(2^{k+1}) = \frac{1}{2^{k+1}} = f_n(x)$ et donc $f \geq f_n$.
3. Comme f_n est positive on a $\int f \mathrm{d}\lambda \geq \int f_n \mathrm{d}\lambda$.
4. Cette fois on veut une borne supérieur. On définit donc g_n avec la valeur à gauche de l'intervalle et des intervalles plus petits de façon à avoir une série intégrable. On pent donner la valeur $\frac{1}{k^\alpha}$ sur l'intervalle $[k, k+1[$.