Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Corrigé Contrôle Continu 1 : 01/10/2024

Questions de cours

1. La borne supérieure de A est le plus petit majorant.

   Comme M est un majorant de A, on a $S \leq M$. Pour $\varepsilon = 1/n, n \geq 1$, il existe $a_n \in A$ tel que $a_n > M - 1/n$ (Attention, certains ont écrit $M - 1/n \in A$: on n'en sait rien.) Comme on a $a_n \in A$ et S majorant de A, on a aussi $a_n \leq S$. Donc $M - 1/n \leq S$. En passant à la limite, il vient $M \leq S$ (Certains on écrit : en passant à la limite on a $M \leq a_n \leq S$: cela ne veut rien dire et c'est faux.)

2. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite croissante de fonctions mesurables et positives sur une partie mesurable B de $\mathbb{R}$. Alors f converge simplement vers une fonction mesurable et positive f et on a $\lim_{n\to\infty} \int_B f_n \, d\lambda = \int_B f \, d\lambda$.

Exercice Soit $f_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n(x) = e^{-nx}$.

1. Si $x = 0$, on a $f_n(0) = 1$ donc tend vers 1 si $n \to \infty$. Si $x > 0$ alors $-nx \to -\infty$ donc $f_n(x) \to 0$. La limite simple f est donc la fonction indicatrice du singleton $\{0\}$.

2. Ici n est fixé. (Si $n = 0$, on a $f_0(x) = 1$ pour tout n). Supposons $n > 0$. On a $f_n \geq 0$ donc $|f_n| = f_n$. Ensuite la fonction f_n est décroissante sur $]0, +\infty[$. Sa borne supérieure sur $]0, +\infty[$ est donc $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ (Attention : pour une fonction décroissante et continue en 0, on a que la limite en 0 est égale à la valeur en 0 ; cela n'est pas vrai pour une fonction non continue en 0/ Prenez l'exemple de la fonction f du 1).

3. Argument 1 : Les fonctions f_n sont continues sur $[0, +\infty[$ et la limite simple f n'est pas continue sur $[0, +\infty[$. Donc il n'y a pas convergence uniforme.

   Argument 2 : s'il y a convergence uniforme, c'est vers f et donc on aurait $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \geq 0\} \to 0$. Or $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \geq 0\} \geq \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x > 0\} = \sup\{|f_n(x)| : x > 0\} = 1$ d'apès la question 2. Donc ce n'est pas possible.