Université Paris-Saclay **Intégration MDD302**
L3 DD **2024–2025**

Feuille d'exercices 2 : Intégrale des fonctions positives (Partie 1)

Exercice 1. (Convergence monotone de fonctions positives) Pour chacune des suites de fonctions réelles positives suivantes, étudier si elles sont croissantes et, si c'est le cas, déterminer leur limite (à valeurs dans $[0, +\infty]$)

1. $f_n : x \mapsto \exp(-x^2/n)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $g_n : x \mapsto \exp(-nx^2)$, $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $h_n : x \mapsto \sqrt{n}\exp(-nx^2)$;
4. $k_n : x \mapsto n|x|$, $n \in \mathbb{N}$;
5. (Bonus) $\ell_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}$.

Exercice 2. (mesure nulle) Soient $a < b$ deux réels, et soit $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer l'égalité des intégrales $\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_{]a,b[} f d\lambda$.

Exercice 3. Soit $f : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ une fonction mesurable positive. Montrer que $\int_{[0,+\infty[} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[0,n]} f d\lambda$ et $\int_{[0,1]} f d\lambda = \lim_{n\to+\infty} \int_{[1/n,1]} f d\lambda$

Exercice 4. (Convergence monotone) On considère $A = \{x_1, x_2, \ldots\}$ un ensemble dénombrable (les points x_i sont supposés deux à deux distincts). On introduit la suite de sous-ensembles de A, et la suite de fonctions indicatrices associées, suivantes :

$$\begin{aligned} A_n &= \{x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \qquad\qquad n \in \mathbb{N}^* \\ f_n &= \mathbb{1}_{A_n}. \end{aligned}$$

1. Montrer que la suite de fonctions positives $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge de manière monotone vers $\mathbb{1}_A$.
2. En déduire que
$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_A = 0.$$

Exercice 5. (Théorème de convergence monotone). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{x}}{n}\right)$ si $x \in \left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]$ et $f_n(x) = 0$ sinon.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f_n \geq 0$.
2. Montrer que la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers $\mathbb{1}_{\left[0, \frac{\pi^2}{4}\right]}$.
3. Montrer que la suite de fonctions (f_n) est croissante.
4. Montrer que la suite $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)$ a une limite et déterminer cette limite.

Exercice 6. (Théorème de convergence monotone pour les séries). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $u_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par
$$u_n = n\mathbb{1}_{[n, n+\frac{1}{n^3}[}.$$

1. Dessiner les graphes des fonctions u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement vers une fonction $f : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ (on ne demande pas d'expliciter cette fonction).
3. Esquisser le graphe de f.
4. Montrer que f est intégrable.
5. Une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ est-elle toujours de limite nulle en $+\infty$?

Exercice 7. (Convergence monotone) Le théorème de convergence monotone s'applique-t-il à la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to [0, \infty]$ définies pour $n \in \mathbb{N}$ par $f_n = \mathbb{1}_{[n,\infty[}$?

Exercice 8. (Convergence simple, convergence uniforme, convergence des intégrales) Pour chacune des suites de fonctions positives ci-dessous, établir s'il y a convergence simple, s'il y a convergence uniforme, et s'il y a convergence des intégrales sur $\mathbb{R}$

1. $f_n = \mathbb{1}_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}$;
2. $g_n = n^{-1}\mathbb{1}_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
3. $h_n = \mathbb{1}_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{N}$;
4. $k_n = n\mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICES BONUS

Exercice 9. (Convergence simple, convergence uniforme, convergence des intégrales) Pour chacune des suites de fonctions positives ci-dessous, établir s'il y a convergence simple, s'il y a convergence uniforme, et s'il y a convergence des intégrales sur $\mathbb{R}$

1. $f_n = n^{-2}\mathbb{1}_{[-n,n]}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
2. $g_n = n\mathbb{1}_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{N}$;
3. $h_n = n^{-1}\mathbb{1}_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbb{N}^*$;
4. $k_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{n}]}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10. (Intégrale de Lebesgue infinie) On sait que la fonction positive, continue par morceaux,

$$f : x \mapsto \mathbb{1}_{x\geq 1}\frac{1}{x}$$

est mesurable ; on désire montrer (comme on s'y attend mais en utilisant uniquement les propriétés de base de l'intégrale de Legesgue pour les fonctions positives) que son intégrale de Lebesgue vaut $+\infty$. Pour cela, on définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par la formule suivante :

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{k+1}}\mathbb{1}_{[2^k,2^{k+1}[}.$$

1. Représenter graphiquement la fonction f, la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et calculer $\int f_n \mathrm{d}\lambda$.
2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f \geq f_n$.
3. Conclure que $\int f \mathrm{d}\lambda = +\infty$.
4. Modifier le raisonnement précédent pour montrer que, si $\alpha > 1$, la fonction mesurable $g : x \mapsto \mathbb{1}_{x\geq 1}\frac{1}{x^\alpha}$ a une intégrale de Lebesgue finie.