Feuille d'exercices 1 bis : Intégrale de Riemann (révisions)

Correction 1.

1. Faux. Contre exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ pour tout $x \in [0,1]$ (faites un dessin !). La fonction f est bien continue. Elle n'est pas positive. Pourtant, pour tout $b \in [0,1]$
$$\int_0^b f(t)\,dt = \frac{-b^2+b}{2} = \frac{b(1-b)}{2} \geq 0.$$
2. Vrai. Par le théorème fondamental de l'analyse, la dérivée de $F : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ est f. Soit $x \in [0,1]$, le taux de variation $\frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ est bien défini pour h dans un voisinage épointé de 0, et positif par croissance de F ; donc sa limite quand $h \to 0$, égale à $f(x)$, est positive (attention : aux bornes de l'intervalle, on en considère que la dérivée et les limites à gauche ou à droite).
3. Faux. Contre exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ constante égale à -2. On a bien $f(t) \leq 1$ mais $\int_0^1 f^2(t)\,dt = 4$ et $\int_0^1 |f(t)|\,dt = 2$. Par contre, si on suppose que $|f| \leq 1$ alors le résultat devient correct par croissance de l'intégrale, puisque $|f|^2 \leq |f|$.
4. Faux. Contre-exemple $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 0$ si $x \in [0,1[$ et $f(1) = 1$. Alors $\int_0^1 f(t)dt = 0$ mais f n'est pas la fonction nulle. Si on suppose que la fonction est de plus continue, le résultat devient correct. On prouve ce résultat par l'absurde. Si f n'est pas la fonction nulle, alors il existe un point $x \in [0,1]$ tel que $f(x) > 0$ (f est une fonction positive). Par continuité de f, il va exister un voisinage $\mathcal{V}$ de x dans $[0,1]$ tel que pour tout $y \in \mathcal{V}$, $f(y) > \frac{f(x)}{2}$ ($\mathcal{V}$ sera de la forme $[0,\alpha[$, $]\alpha,\beta[$ ou $]\beta,1]$). Ainsi,
$$\int_0^1 f(t)dt = \int_{\mathcal{V}} f(t)dt + \underbrace{\int_{[0,1]\setminus\mathcal{V}} f(t)dt}_{\geq 0} \geq \int_{\mathcal{V}} \frac{f(x)}{2}dt > 0,$$
mais $\int_0^1 f(t)dt = 0$, on aboutit donc à une contradiction.
5. Vrai. On considère la fonction $g : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_x^{x+T} f(t)dt$. La fonction g est dérivable de dérivée $g'(x) = f(x+T) - f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$. Par T-périodicité de f, $g' = 0$, donc g est une fonction constante. Donc pour tout réel a on a $g(a) = g(0)$, autrement dit
$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+T} f(t)dt = \int_0^T f(t)dt.$$

Correction 2.

1. (a) On cherche une primitive. La fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{-\cos(x^2)}{2}$ est une primitive de $x \mapsto x\sin(x^2)$ sur $\mathbb{R}$. Par le théorème fondamental de l'analyse on a alors,
$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2)dx = \left[\frac{-\cos(x^2)}{2}\right]_0^{\sqrt{\pi}} = 1.$$

(b) On utilise le changement de variables. On souhaite poser $x = \sin(t)$. Soient donc $\varphi : x \mapsto \arcsin(x)$ et $f : x \mapsto 1 - \sin^2(x)$. Comme $\varphi' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, par la formule de changement de variables

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx &= \int_{-1}^{1} f(\varphi(x))\,\varphi'(x)\,dx \\
&= \int_{\varphi(-1)}^{\varphi(1)} f(t)\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2(t)\,dt \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2t)}{2}\,dt \\
&= \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

(c) On utilise la formule d'intégration par parties rappelée dans l'en-tête. On prend ici $u : x \mapsto x$ et $v' : x \mapsto \sin(x)$ ce qui nous donne $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} x\sin(x)\;dx = [-x\cos(x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos(x)\;dx &= \pi + \int_0^{\pi} \cos(x)\;dx \\
&= \pi + (\sin(\pi) - \sin(0)) = \pi
\end{aligned}$$

(d) On utilise la décomposition en éléments simples. Les racines de $x \to x^2 - 4$ étant simples, on cherche A et B tels que

$$\frac{4}{x^2-4} = \frac{-4}{(2+x)(2-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{2-x} = \frac{(B-A)x + 2(A+B)}{4-x^2}\,.$$

Il en suit donc que :

$$2(A+B) = -4 \quad \text{ et } B - A = 0\,.$$

On en déduit que : $B = -1$ et $A = -1$, et donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{4}{x^2-4}\,dx = -\int_0^1 \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\;dx &= [\ln(2-x) - \ln(2+x)]_0^1 \\
&= -\ln(3),
\end{aligned}$$

où l'on s'est assuré que les dénominateurs $\frac{1}{2+x}$ et $\frac{1}{2-x}$ sont strictement positifs sur $[0,1]$ pour utiliser le logarithme.

2. (a) On procède par intégration par parties avec $u(t) = t$ et $v'(t) = e^t$, ce qui nous donne pour la primitive qui s'annule en 0 :

$$\int_0^x te^t\;dt = xe^x - \int_0^x e^t\;dx = xe^x - e^x + e = e^x(x-1) + e\,.$$

(b) Puisque la dérivée de $u : x \mapsto x^2$ est $u : x \mapsto 2x$, on reconnaît dans cette fonction, à une constante mutliplicative près, la formule $u'\cos(u)$ pour $u \in C^1$, dont une primitive est $\sin(u)$. En conclusion, une primitive est donnée par

$$x \mapsto \frac{1}{2}\sin(x^2).$$

(c) La présence du logarithme d'un polynôme nous incite à intégrer par parties, en dérivant ce logarithme et en primitivant la fonction constante 1, afin d'aboutir à une fraction rationnelle. Avec $u(t) = \ln(1+t^2)$ et $v'(t) = 1$, et donc : $u'(t) = \frac{2t}{1+t^2}$ et $v(t) = t$, ce qui nous donne pour la primitive qui s'annule en 0 :

$$\int_0^x \ln(1+t^2)\,dt = x\ln(1+x^2) - \int_0^x \frac{2t^2}{1+t^2}\,dt = x\ln(1+x^2) - \int_0^x 2 - \frac{2}{1+t^2}\,dt$$
$$= x\ln(1+x^2) - 2x + 2\arctan(x)$$

Correction 3.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on remarque que

$$\frac{x^k}{k} = \int_0^x t^{k-1}dt.$$

Il est toujours licite d'intervertir une intégrale et une somme finie. On a donc

$$\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = \int_0^x \left(\sum_{k=1}^n t^{k-1}\right)dt = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}dt = -\ln(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt.$$

Autre méthode : on dérive les deux expressions, on trouve la même chose, et on vérifie qu'on a bien l'égalité en 0.

2. On peut prouver le résultat par encadrement. Pour $t \in [0,x]$, on a $\frac{1}{1-t} \leq \frac{1}{1-x}$. Ainsi,

$$0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \leq \frac{1}{1-x}\int_0^x t^n dt = \frac{1}{1-x}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Le terme de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui permet de conclure.

3. On a directement

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} = -ln(1-x).$$

Correction 4.

1. Montrons que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales des fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l'intégrale $I = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ de la fonction limite. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$|I_n - I| = \left|\int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right| = \left|\int_a^b (f_n(t) - f(t))\mathrm{d}t\right|$$
$$\leq \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\mathrm{d}t \leq \int_a^b \|f_n - f\|_\infty \,\mathrm{d}t$$
$$\leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty\,,$$

où la première ligne s'obtient grâce à la linéarité de l'intégrale, la deuxième ligne vient de l'inégalité triangulaire et de la définition $\|\cdot\|_\infty$ et la troisième ligne vient de la normalisation de l'intégrale pour une fonction constante. La convergence uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f s'exprime par $\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\|_\infty = 0$. On obtient donc que (I_n) converge vers I.

2. (a) On sait (par la formule de de Moivre) que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_0^{\pi} \sin(nx)^2 dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos(2nx))dx = \frac{\pi}{2}.$$

En particulier,

$$\int_0^{\pi} f_n(x)dx = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi^2}{2}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto x$ sur le segment $[0, \pi]$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$|f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n}.$$

Par conséquent $(||f_n - f||_\infty)$ converge vers 0.

(c) Première méthode. On sait calculer explicitement les intégrales ! La suite d'intégrales

$$\int_0^{\pi} f_n(x)dx = \frac{\pi}{2n} + \frac{\pi^2}{2}$$

converge bien vers $\frac{\pi^2}{2} = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}x$ quand $n \to +\infty$.
Deuxième méthode. On applique la première question : la suite (f_n) est une suite de fonctions définies sur le segment $[0, \pi]$ et converge uniformément vers f par conséquent $(\int_0^{\pi} f_n(x)dx)$ converge vers

$$\int_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{2}.$$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 x^n(1-x)dx = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

et donc

$$\int_0^1 g_n(x)dx = 1,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement, sur le segment $[0, 1]$, vers la fonction nulle. Pour $x = 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on a $g_n(x) = 0$, donc la suite $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire et converge donc vers 0. Pour $x \in [0, 1[$ on a, par croissances comparées, que $g_n(x) = (1-x)(n+1)(n+2)x^n$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. Cette fois, la convergence n'est pas uniforme ; en étudiant la fonction g_n, on peut même démontrer que $\|g_n\|_\infty$ grandit comme n lorsque $n \to +\infty$.

(c) Dans cet exemple, on ne peut pas intervertir limite et intégrale car $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 g_n(x)dx = 1$ et $\int_0^1 \lim_{n\to+\infty} g_n(x)dx = 0$.

4. (a) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $f : x \mapsto 0$. En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n > N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons que

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a que

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = \frac{1}{n}\int_0^n dx = 1,$$

et l'intégrale de la fonction nulle sur $\mathbb{R}$ vaut 0.

Correction 5.

1. Posons $x = \sqrt{a} \geq 0$ et $y = \sqrt{b} \geq 0$. On a alors

$$x^2 + y^2 \leq (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2,$$

ce qui nous donne

$$a + b \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $[0, \infty[$, on obtient

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}\,.$$

La seconde inégalité est symétrique, il suffit de montrer que, si $b \geq a$, on a

$$0 \leq \sqrt{b} - \sqrt{a} \leq \sqrt{b-a}.$$

L'inégalité de gauche provient de la croissance de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $\mathbb{R}^+$, celle de droite provient de la sous-additivité puisqu'elle revient à

$$\sqrt{b} \leq \sqrt{b-a} + \sqrt{a}.$$

2. Tout d'abord, il convient de vérifier que la fonction g est bien définie. Puisque f est continue et à valeurs positives, alors pour tout x la fonction

$$t \mapsto \sqrt{f(t) + x^2}$$

est, par les théorèmes usuels, continue sur $[0, 1]$, donc g a bien un sens.
Soit maintenant $x \in \mathbb{R}$ et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels qui converge vers x. En utilisant de nouveau la linéarité de l'intégrale et l'inégalité triangulaire, puis la question précédente, on obtient alors

$$\begin{aligned}
|g(x_n) - g(x)| &= |\int_0^1 \sqrt{f(t) + x_n^2}dt - \int_0^1 \sqrt{f(t) + x_n^2}dt| \\
&\leq \int_0^1 |\sqrt{f(t) + x_n^2} - \sqrt{f(t) + x_n^2}|\, dt \\
&\leq \int_0^1 |\sqrt{x^2 - x_n^2}|\mathrm{d}t = \sqrt{|x^2 - x_n^2|}.
\end{aligned}$$

Lorsque $n \to +\infty$, par continuité de la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ sur $\mathbb{R}$, le terme de droite tend vers 0, donc $g(x_n)$ tend vers $g(x)$. Ainsi, par caractérisation séquentielle de la limite, g est continue en x.

3. La fonction racine est croissante sur son intervalle de définition et f est positive, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$g(x) \geq \int_0^1 \sqrt{x^2}dt = \int_0^1 |x|dt = |x|\,.$$

Il suit que g tend vers l'infini en l'infini.