Chapitre 2 Hydrostatique

1. Fluide au repos

L'hydrostatique traite des cas où le fluide est statique, c'est-à-dire où la vitesse du fluide est nulle ($\mathbf{u}$ = 0).

Quelles grandeurs caractéristiques pour un fluide au repos ?

Chapitre 2 Hydrostatique

1. Fluide au repos

L'hydrostatique traite des cas où le fluide est statique, c'est-à-dire où la vitesse du fluide est nulle (**u** = 0).

Quelles grandeurs caractéristiques pour un fluide au repos ?

- masse volumique ✈
- pression *p*

Qu'est-ce que la masse volumique ? Unité ?

Valeurs typiques ?

Chapitre 2 Hydrostatique

1. Fluide au repos

L'hydrostatique traite des cas où le fluide est statique, c'est-à-dire où la vitesse du fluide est nulle (**u** = 0).

Quelles grandeurs caractéristiques pour un fluide au repos ?

- masse volumique ✈
- pression *p*

Qu'est-ce que la masse volumique ? Masse par unité de volume (kg/m^3)

Valeurs typiques : ✈ ~10^3 kg/m^3 pour les liquides

✈ ~ 1 kg/m^3 pour les gaz

Qu'est-ce que la pression ? Unité ?

Valeurs typiques ?

Chapitre 2 Hydrostatique

1. Fluide au repos

L'hydrostatique traite des cas où le fluide est statique, c'est-à-dire où la vitesse du fluide est nulle ($\mathbf{u} = 0$).

Quelles grandeurs caractéristiques pour un fluide au repos ?

- masse volumique ρ
- pression p

Qu'est-ce que la masse volumique ? Masse par unité de volume (kg/m^3)

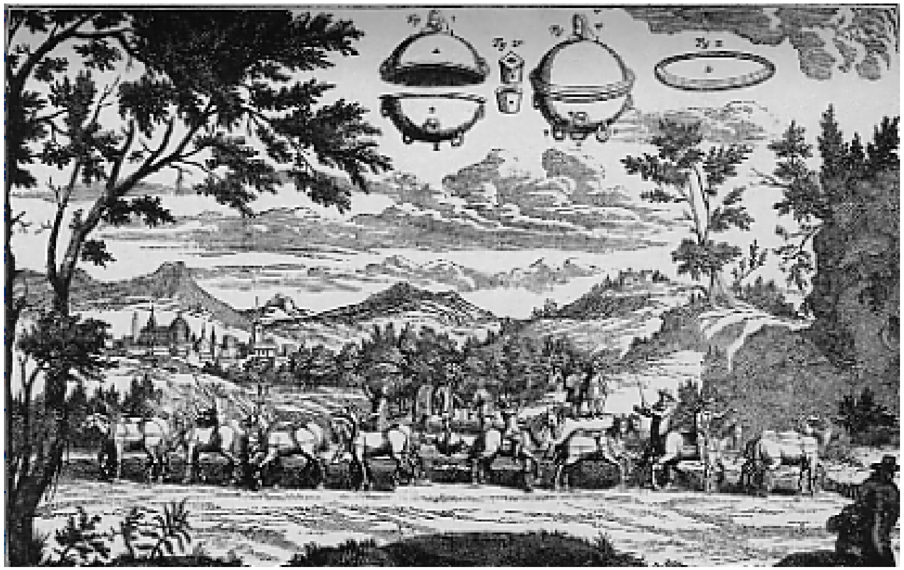
Valeurs typiques : $\rho \sim 10^3$ kg/m^3 pour les liquides
$\rho \sim 1$ kg/m^3 pour les gaz

Qu'est-ce que la pression ? Force par unité de surface (N/m^2)

Valeurs typiques : pression atmosphérique $p \sim 10^5$ Pa
expérimentalement $10^{-10} < p < 10^{11}$ Pa

2. La pression

Mise en évidence macroscopique de la pression et du vide :
Les « Hémisphères de Magdebourg »



L'expérience d'Otto von Guericke,
bourgmestre de Magdebourg :
2 hémisphères d'environ 50 cm de diamètre sous « vide »

1654 à Ratisbonne devant
l'empereur Ferdinand III :
2 attelages de 7 chevaux

1656 à Magdebourg :
2 attelages de 8 chevaux

1661 : 2 attelages de 12 chevaux

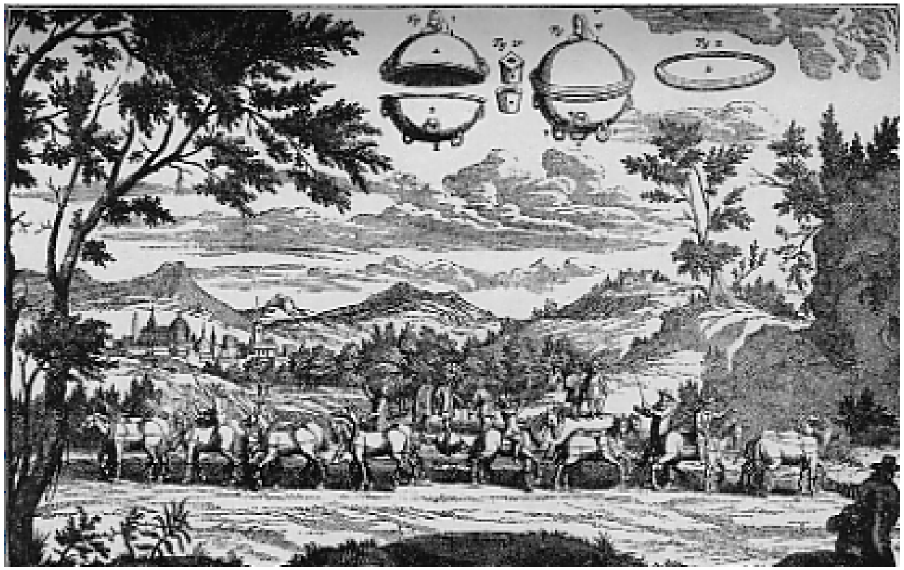
hémisphères de 1870

Quelle force nécessaire pour les séparer ?

paquet de café sous vide

2. La pression

Mise en évidence macroscopique de la pression et du vide :
Les « Hémisphères de Magdebourg »



L'expérience d'Otto von Guericke,
bourgmestre de Magdebourg :
2 hémisphères d'environ 50 cm de diamètre sous « vide »

1654 à Ratisbonne devant l'empereur Ferdinand III : 2 attelages de 7 chevaux

1656 à Magdebourg : 2 attelages de 8 chevaux

1661 : 2 attelag chevaux

hémisphères de 1870

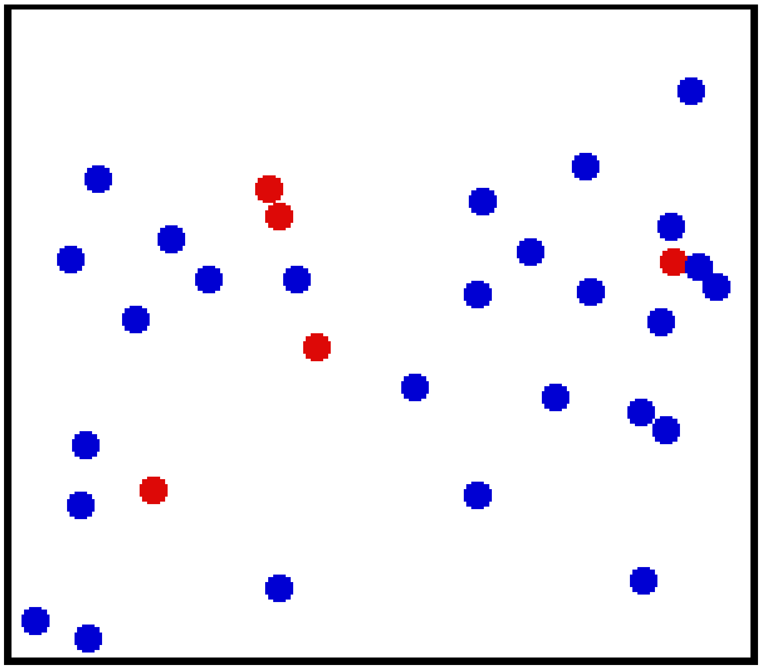
Quelle force nécessaire pour les séparer ?

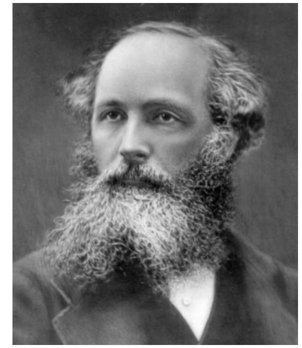
$$F = pS = p\pi D^2/4 \approx 2.10^4\,N$$

(cf TD 2)

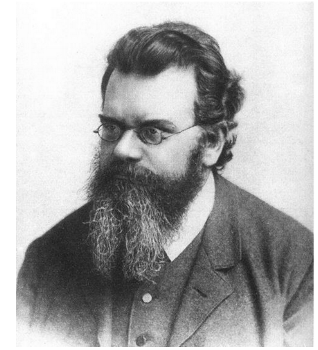
Vision microscopique de la pression

> Théorie cinétique des gaz
(mécanique statistique)





James Clerk Maxwell
(1831-1879)
physicien écossais



Ludwig Boltzmann
(1844-1906)
physicien allemand

$$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = kT$$

par degré de liberté
où k est la constante de Boltzmann

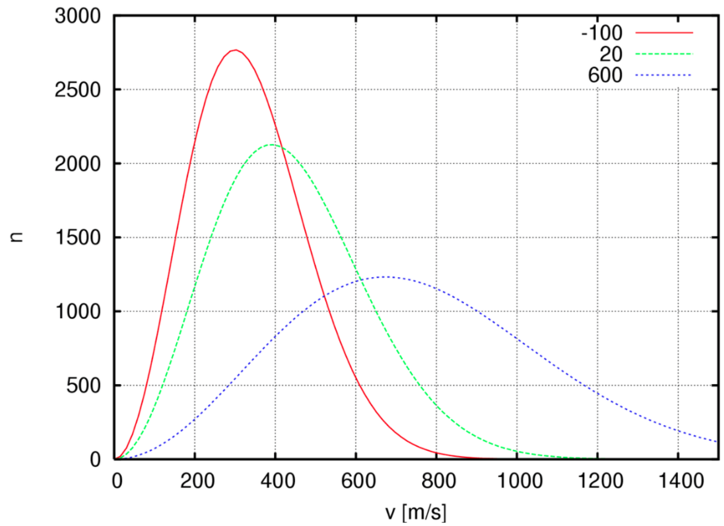
$$\frac{3}{2} m\overline{v^2} = kT$$

pour 1 atome à 3D
(3 degrés de liberté de translation)

$$\frac{3}{2} M\overline{v^2} = RT$$

pour 1 mole de gaz monoatomique
($R = N_A k$)

Distribution des vitesses des molécules dans un gaz



vitesse la plus probable v^*

$\neq$

vitesse moyenne $\bar{v}$

$\neq$

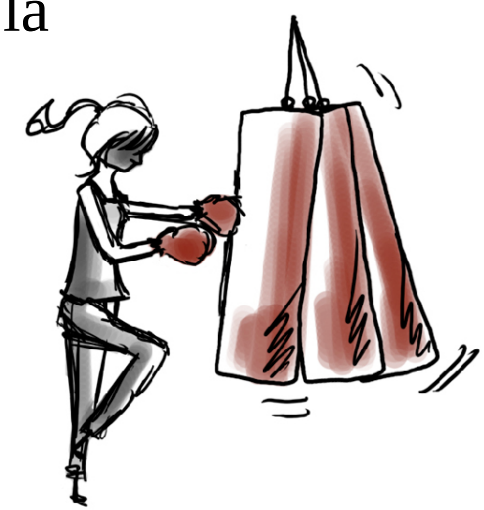
vitesse quadratique moyenne $\sqrt{\overline{v^2}}$

Le calcul microscopique de la pression par le bilan des collision des particules sur une paroi en tenant compte de la distribution des vitesses donne :

$$p = \frac{Nm\overline{v^2}}{3V}$$

qui correspond bien à l'équation d'état déjà connue dite équation des gaz parfaits :

$$p = \frac{NkT}{V}$$



La pression est une quantité **scalaire** et non vectorielle.

La pression peut dépendre en toute généralité de l'espace et du temps : p(x,y,z,t).

Elle correspond à une contrainte normale à tout élément de surface ***dS***. Et se manifeste donc par une force résultante normale à l'élément de surface correspondant:

$$\boldsymbol{dF} = p\,\boldsymbol{dS}$$

La force résultante totale sur une surface s'exprime donc en toute généralité :

$$\mathbf{F} = \int_S p\,\mathbf{dS}$$

Le calcul est très simple si la pression en constante sur toute la surface et si la surface est plane. Le module de la force est alors simplement $F = pS$.

Le calcul est plus compliqué quand la pression n'est pas constante $(F = \int_S p dS)$
ou quand la surface n'est pas plane $(\mathbf{F} = p\int_S \mathbf{dS})$

Le calcul est le plus complexe quand la pression n'est pas constante et la surface n'est pas plane.

3. Equation de l’hydrostatique

Qu’est-ce que l’équation de l’hydrostatique ?

3. Equation de l’hydrostatique

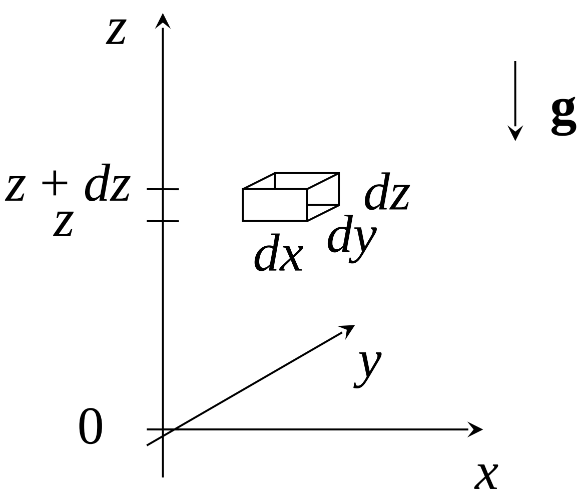
C’est l’équation qui exprime l’équilibre statique du fluide

Comment l’écrire ?

3. Equation de l'hydrostatique

C'est l'équation qui exprime l'équilibre statique du fluide

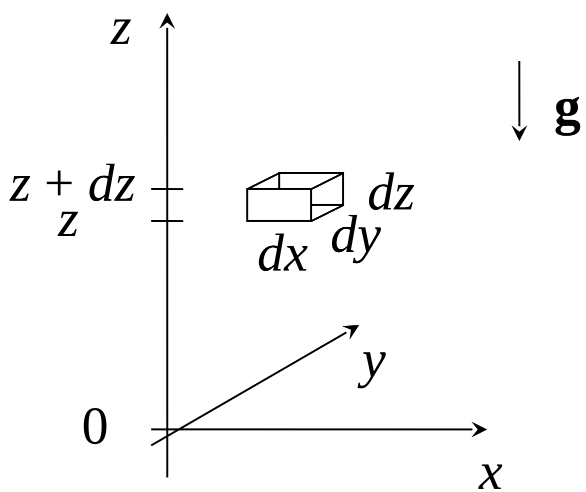
On peut l'obtenir en écrivant l'équilibre d'un élément de fluide de masse volumique ✈ dans le champ de gravité **g**



3. Equation de l'hydrostatique

C'est l'équation qui exprime l'équilibre statique du fluide

On peut l'obtenir en écrivant l'équilibre d'un élément de fluide de masse volumique ρ dans le champ de gravité **g**



Suivant z : $p(z)dxdy - p(z+dz)dxdy - \rho g dxdydz = 0$

$$-dp - \rho g dz = 0$$

$$-\frac{dp}{dz} - \rho g = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

Suivant x : $\frac{dp}{dx} = 0$

Suivant y : $\frac{dp}{dy} = 0$

l'équation de l'hydrostatique s'écrit donc vectoriellement $\nabla p = \rho \mathbf{g}$

4. Pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : ρ = cte (cas de l'eau sauf exceptions)

on peut alors résoudre (intégrer) l'équation de l'hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \Rightarrow$$

4. Pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : ρ = cte (cas de l’eau sauf exceptions)
on peut alors résoudre (intégrer) l’équation de l’hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0 - \rho g z \qquad \text{où } p = p_0 \text{ en } z = 0 \ \text{(C.L.)}$$

Si h est la différence d’altitude (ou de profondeur) entre 2 points A et B,
la différence de pression entre A et B est :

4. Pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : ✈= cte (cas de l'eau sauf exceptions)

on peut alors résoudre (intégrer) l'équation de l'hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0 - \rho g z \qquad \text{où } p = p_0 \text{ en } z = 0$$

Si h est la différence d'altitude (ou de profondeur) entre 2 points A et B,
la différence de pression entre A et B est :

$$p_B - p_A = \rho g h$$

Applications numériques

(1) Cas de l'eau (✈= 10^3 kg/m^3) : pression à 10 m sous l'eau ?

4. Pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : ρ = cte (cas de l'eau sauf exceptions)

on peut alors résoudre (intégrer) l'équation de l'hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \Rightarrow \qquad p = p_0 - \rho g z \qquad \text{où } p = p_0 \text{ en } z = 0$$

Si Δh est la différence d'altitude (ou de profondeur) entre 2 points A et B,
la différence de pression entre A et B est :

$$p_B - p_A = \rho g \Delta h$$

Applications numériques

(1) Cas de l'eau ($\rho = 10^3$ kg/m^3) : pression à 10 m sous l'eau ?

$\rho g \Delta h = 10^5$ Pa et $p_0 = 10^5$ Pa

la pression à 10 m sous l'eau est double de la pression atmosphérique

la pression augmente de 10^5 Pa tous les 10 m d'eau

(2) Cas du mercure ($\rho = 13{,}6\ 10^3$ kg/m^3) :

4. Pression hydrostatique dans les fluides incompressibles

Cas le plus simple : ρ = cte (cas de l'eau sauf exceptions)

on peut alors résoudre (intégrer) l'équation de l'hydrostatique très facilement :

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \Rightarrow \quad p = p_0 - \rho g z$$

où $p = p_0$ en $z = 0$

Si h est la différence d'altitude (ou de profondeur) entre 2 points A et B,
la différence de pression entre A et B est :

$$p_B - p_A = \rho g h$$

Applications numériques

(1) Cas de l'eau ($\rho = 10^3$ kg/m^3) : pression à 10 m sous l'eau ?

$\rho g h = 10^5$ Pa et $p_0 = 10^5$ Pa

la pression à 10 m sous l'eau est double de la pression atmosphérique

la pression augmente de 10^5 Pa tous les 10 m d'eau

(2) Cas du mercure ($\rho = 13{,}6\ 10^3$ kg/m^3) :

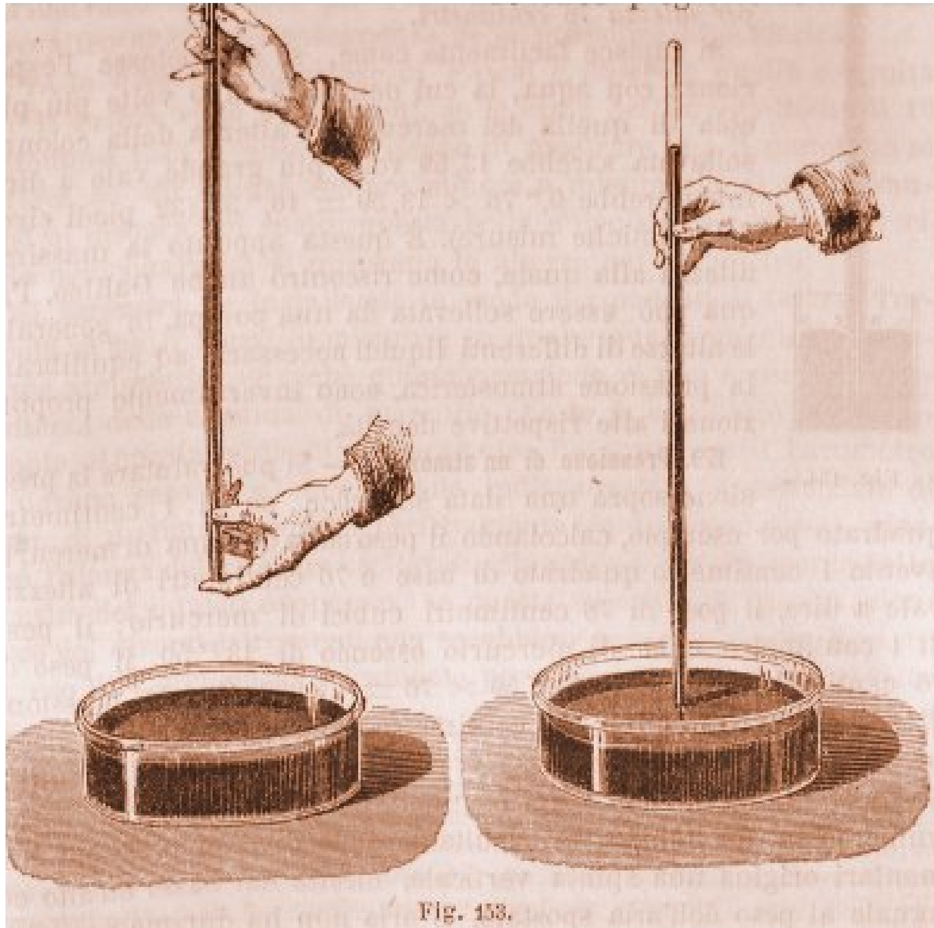
$\rho g \Delta h = 10^5$ Pa => $\Delta h = 0{,}76$ m

76 cm de mercure correspond à la pression atmosphérique

Application au baromètre à mercure de Torricelli

5. Applications

a. Le “ baromètre de Torricelli”



Expérience de Torricelli (1644)

5. Applications

a. Le “ baromètre de Torricelli”

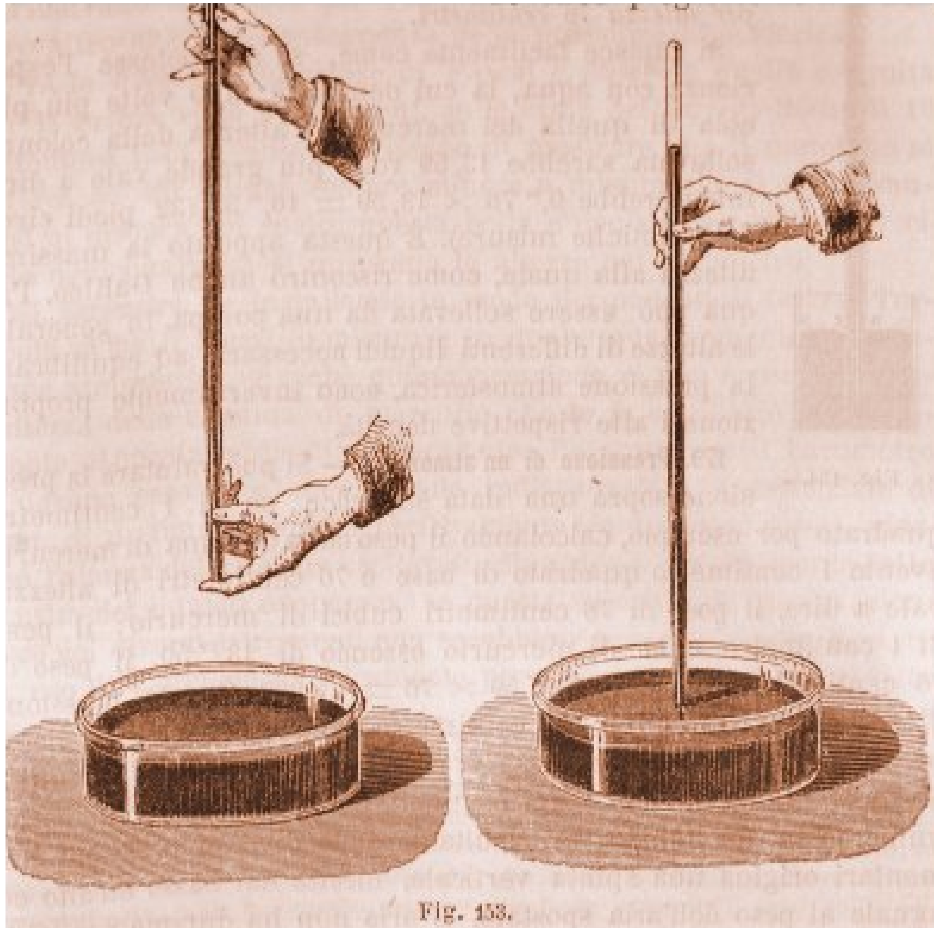
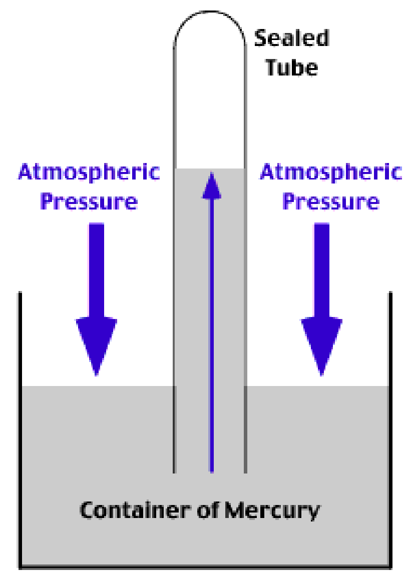
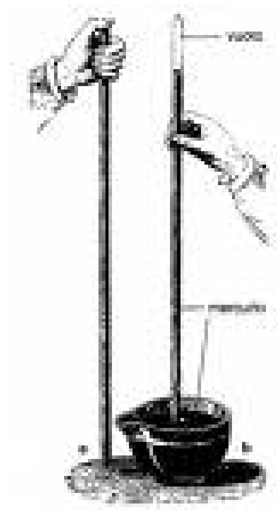


Fig. 153.

Expérience de Torricelli (1644)

Hauteur de la colonne de mercure : 76 cm





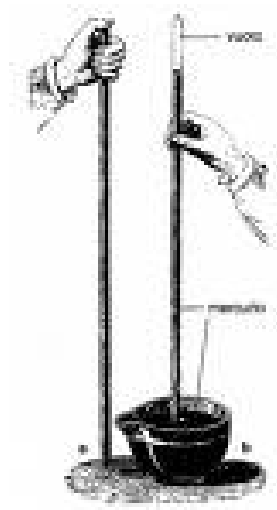
Evangelista Torricelli
(1608-1647)

Blaise Pascal
(1623-1662)

Expérience avec du mercure :
76 cm

Evangelista Torricelli
(1608-1647)

Expérience avec du mercure :
76 cm



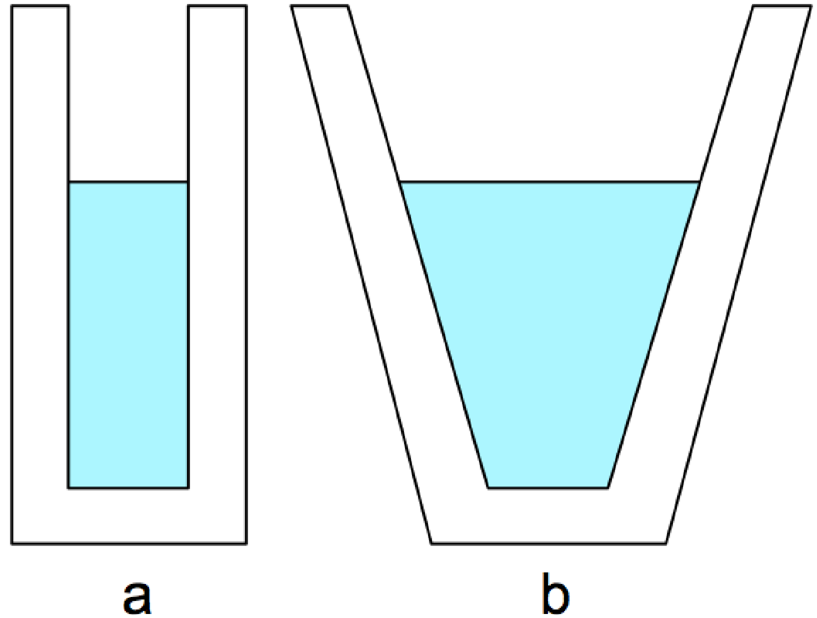
Blaise Pascal
(1623-1662)

Expérience avec du vin (Rouen, 1646) :
tube de verre de 15 m rempli de vin
et renversé dans un baquet
=> 10,4 m mesuré

Le « paradoxe » de Stevin (1586):

la pression d’un liquide au fond d'un récipient est indépendante de sa forme

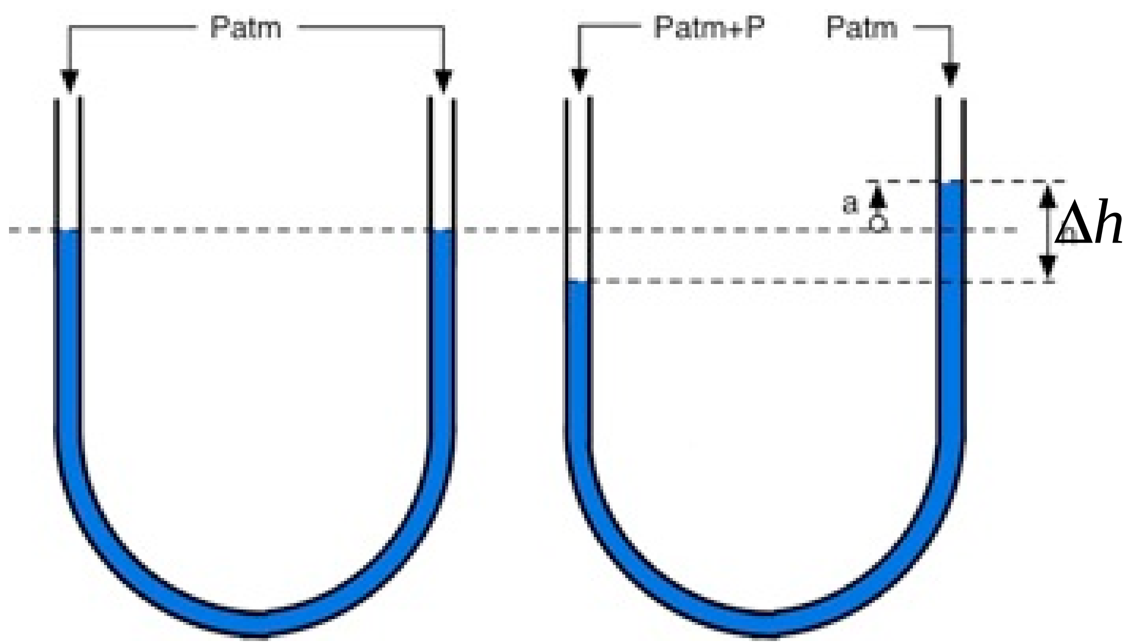
Simon Stevin
(1548-1620)
ingénieur flamand



b. Manomètre à tube en U

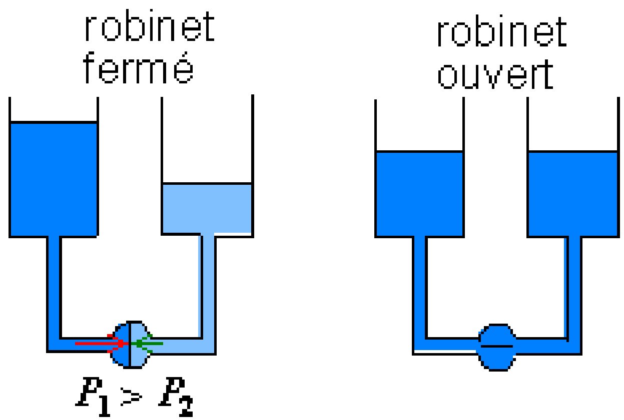
Si Δh est la dénivellation entre 2 points A et B, la différence de pression entre A et B est:

$$p_B - p_A = \rho g \Delta h$$



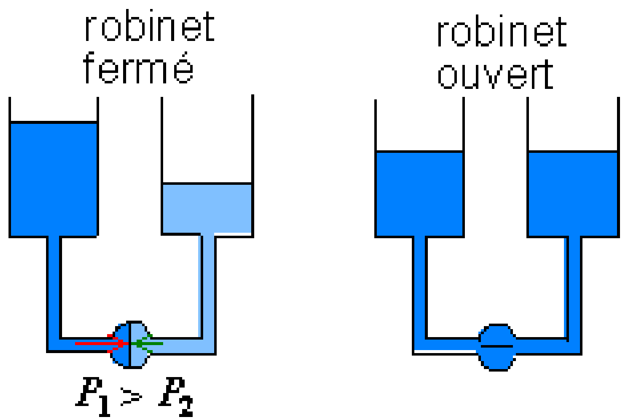
Mesure de (différence de) pression par mesure de (différence de) hauteur

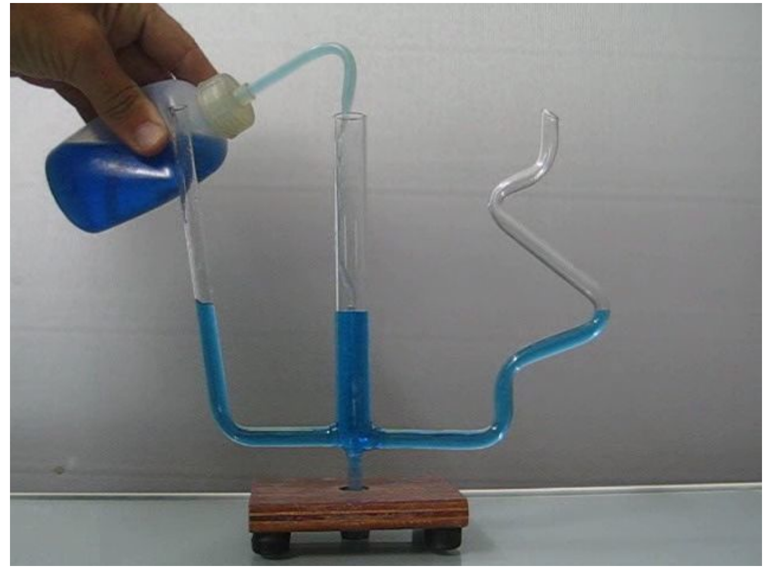
« Principe des vases communicants »



sert de « niveau » très simple dans le bâtiment
pour mettre deux points à l'horizontale

« Principe des vases communicants »

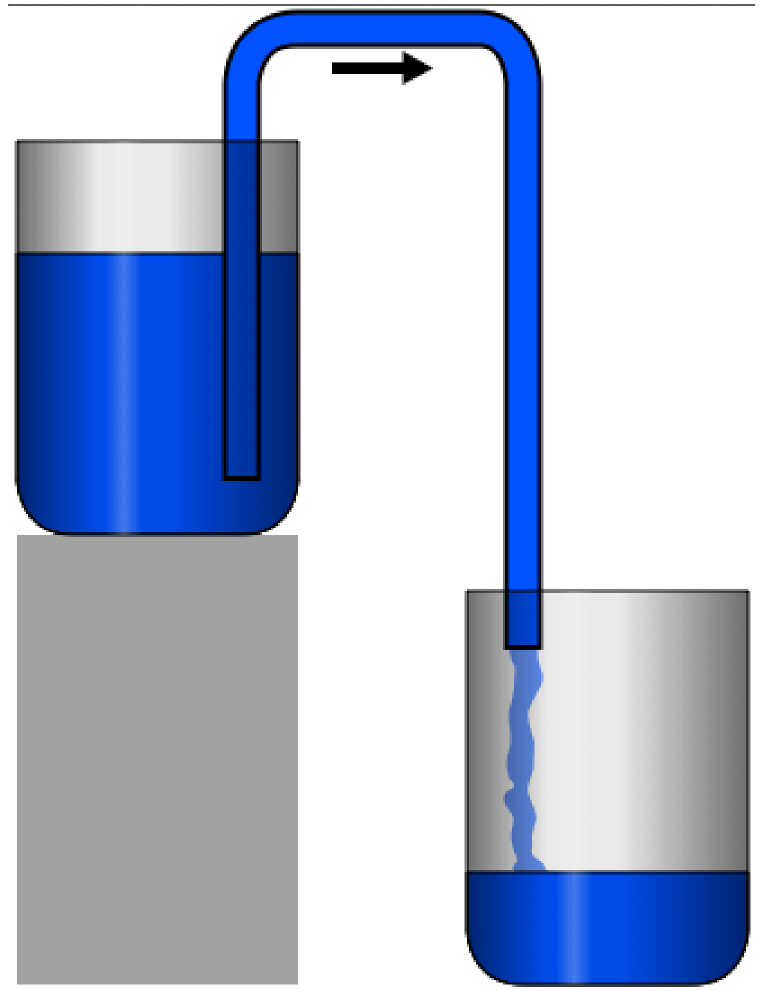




sert de « niveau » très simple dans le bâtiment
pour mettre deux points à l'horizontale

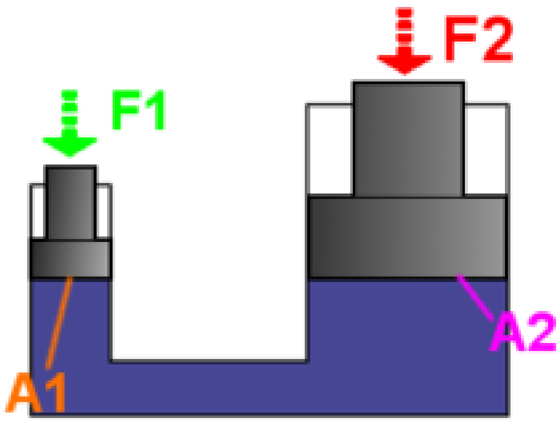
Attention aux tubes trop fins
(D < 3 mm pour de l'eau)
=> Phénomène d'ascension
capillaire (cf chapitre 7)

Le siphon



5. Applications

c. La presse hydraulique

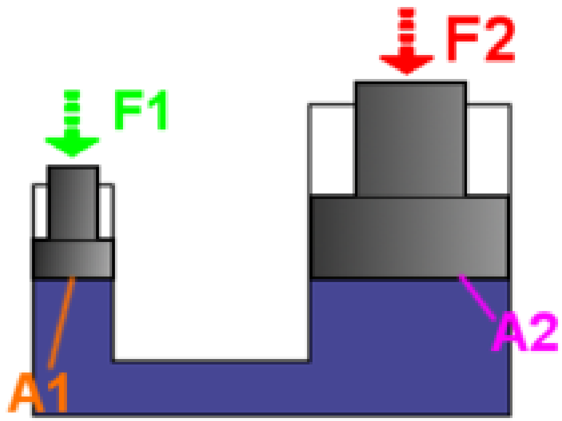


principe ?

inventée avec la seringue par Blaise Pascal

5. Applications

c. La presse hydraulique



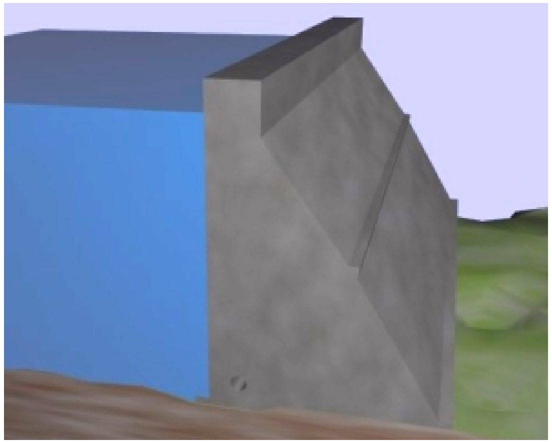
$$p_2 = p_1$$

$$\frac{F_2}{A_2} = \frac{F_1}{A_1}$$

$$F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} >> F_1$$

inventée avec la seringue par Blaise Pascal

6. Dimensionnement des barrages et digues

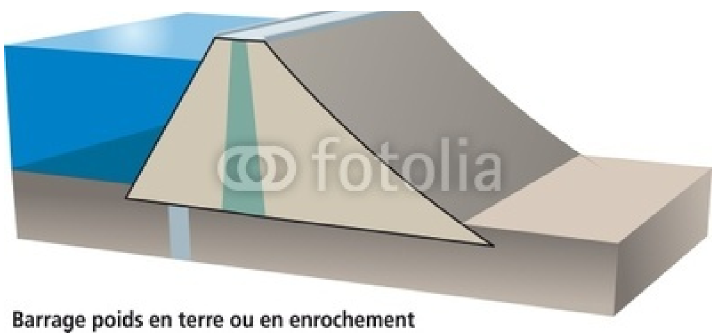


barrage-poids

Force exercée par l'eau sur le barrage ?

Quelle quantité de terre ou de béton pour le barrage?

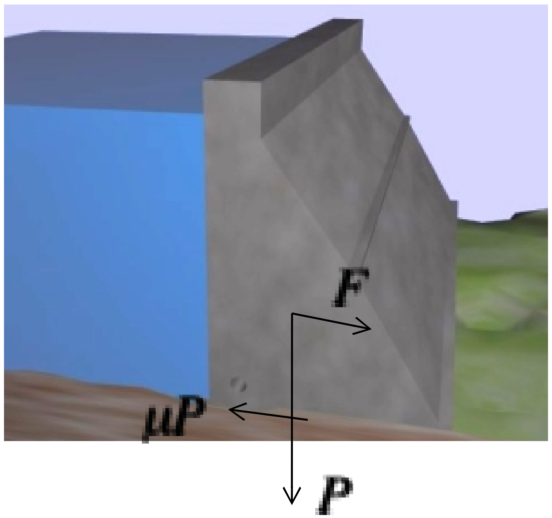
Quelle forme adopter pour le barrage ?



barrage d'Aussois (Savoie)

6. Dimensionnement des barrages et digues

Cas du barrage poids



Force exercée par l'eau sur le barrage ?

$$F = \int_0^h (p - p_0)\,dz\,L$$

$$F = L\int_0^h \rho g z\,dz$$

$$F = \rho g L h^2/2$$

Pour un barrage de 100 m de long retenant 10 m d'eau : $F \approx 5.10^7 N$

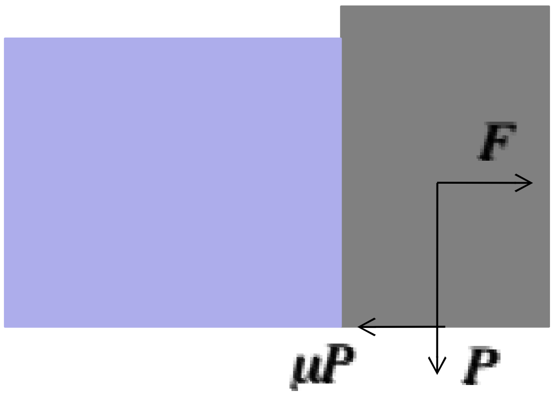
Poids nécessaire du barrage : $P = F/\mu = \rho g L h^2/(2\mu) \approx 3.10^8 N$

avec $\mu \approx 0{,}2$ coefficient de friction solide

Volume de béton nécessaire : $V = (\rho/\rho_b) L h^2/(2\mu) \approx 10^4 m^3$

avec $\rho_b \approx 3.10^3$ kg/m^3 masse volumique du béton

Forme du barrage ?



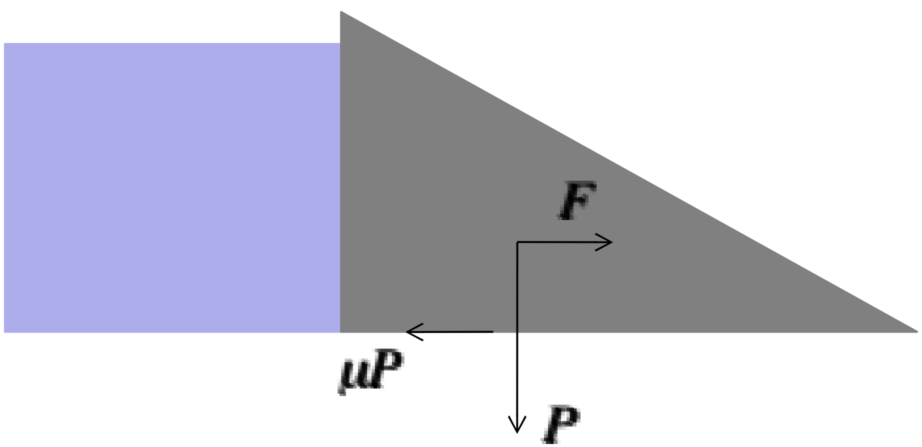
Rectangulaire ?

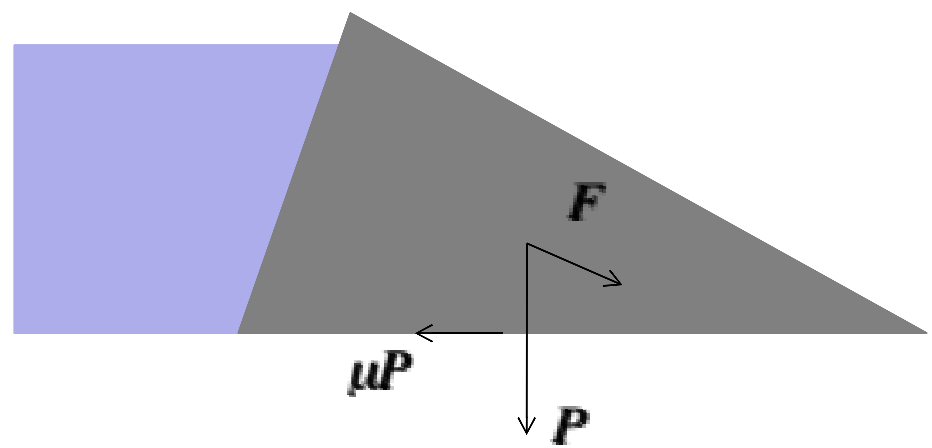
Largeur nécessaire : $l = V/(Lh) = (\rho/\rho_b)h/(2\mu) \approx h \approx 10m$

Mais risque de basculement

=> Triangulaire

Largeur nécessaire : $l = 2V/(Lh) \approx 2h \approx 20m$





Le barrage en terre du Lac de Serre-Ponçon (Hautes-Alpes) construit en 1957-59

Dimension du barrage : 123 m de haut et 125 m de large au pied (sur 600 m de long)

Retenue d’eau : 1 272 millions de m^3

7. Pression hydrostatique dans les fluides compressibles

Cas moins simple : ✈*(z)* ≠ cte (cas des océans profonds et de l'atmosphère)

$$\frac{dp}{dz} = -\rho(z)g$$

i) Cas des océans profonds : supposons $\rho(z) = \rho_0 - \alpha z$

Profil de pression *p(z)* ? (avec $p = p_0$ en $z = 0$)

ii) Cas de l'atmosphère :

Si atmosphère supposée "isotherme" (T = cte) alors $\rho(p)$

Profil de pression *p(z)* ? (avec $p = p_0$ en $z = 0$)

cf cours 5
« Météorologie »

8. Force d'Archimède

Qu'est-ce ?

Archimède
Physicien et mathématicien grec
(287-212 av. J.C.)
"Traité des corps flottants"

8. Force d'Archimède

C'est la force exercée par le fluide sur un corps totalement ou partiellement immergé

Archimède
Physicien et mathématicien grec
(287-212 av. J.C.)
"Traité des corps flottants"

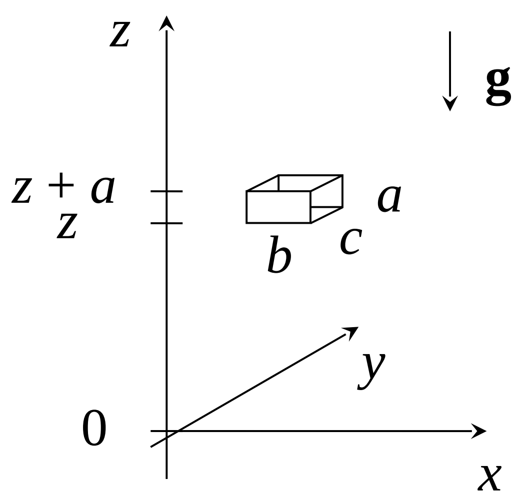
Que vaut-elle ?

Calcul simple par exemple pour un corps de forme parallélépipédique totalement immergé

8. Force d’Archimède

C’est la force exercée par le fluide sur un corps totalement ou partiellement immergé

Calcul dans le cas simple d’un corps de forme parallélépipédique totalement immergé :



$$p = p_0 - \rho g z$$

$$F_A = \big(p(z) - p(z+a)\big)S$$

$$F_A = \rho g a b c = \rho V g$$

$$\mathbf{F}_A = -\rho V \mathbf{g}$$

On peut montrer que cette expression reste valable pour n’importe quel volume de n’importe quelle forme

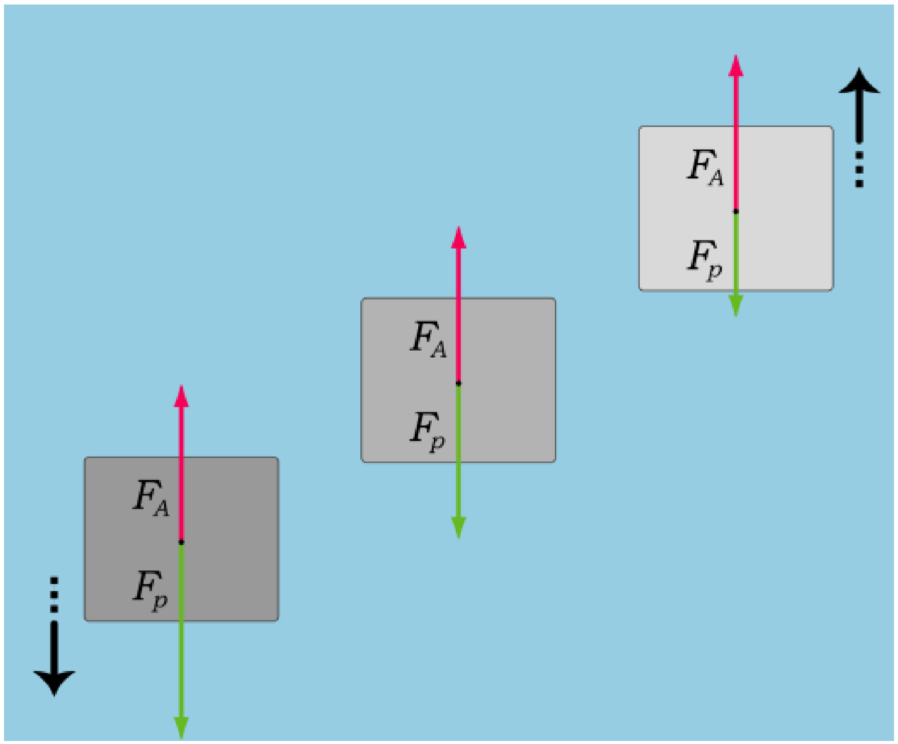
« La force d’Archimède est égale et opposée au poids du fluide déplacé »

Notion de « poids apparent » pour un corps immergé dans un fluide

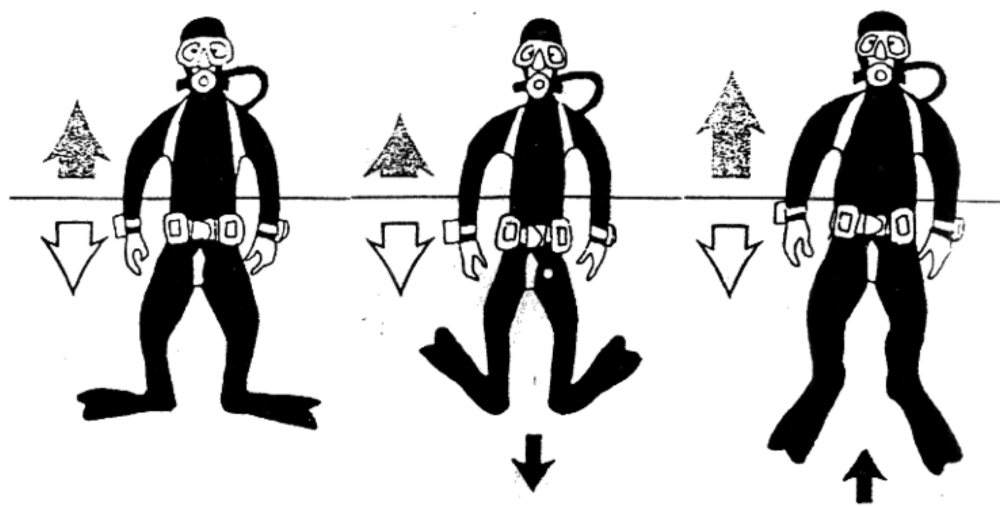
Qu'est-ce ?

Notion de « poids apparent » pour un corps immergé dans un fluide

$$P_{\text{app}} = P - F_A$$

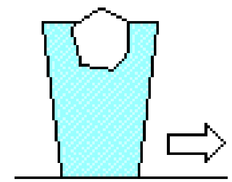


C'est le poids diminué de la poussée d'Archimède



Force d’Archimède

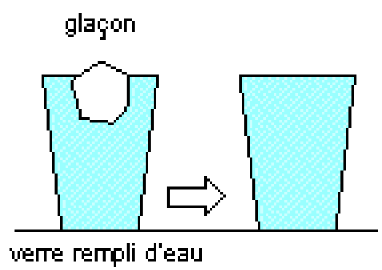
expérience d’un glaçon qui fond

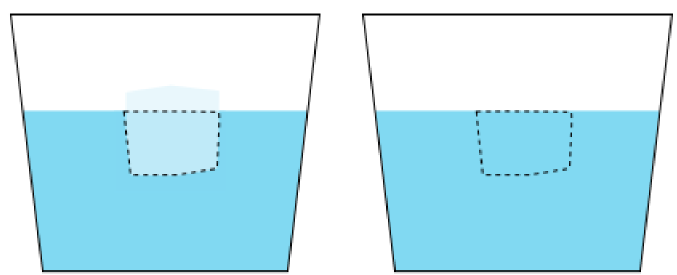


?

Force d’Archimède

expérience d’un glaçon qui fond



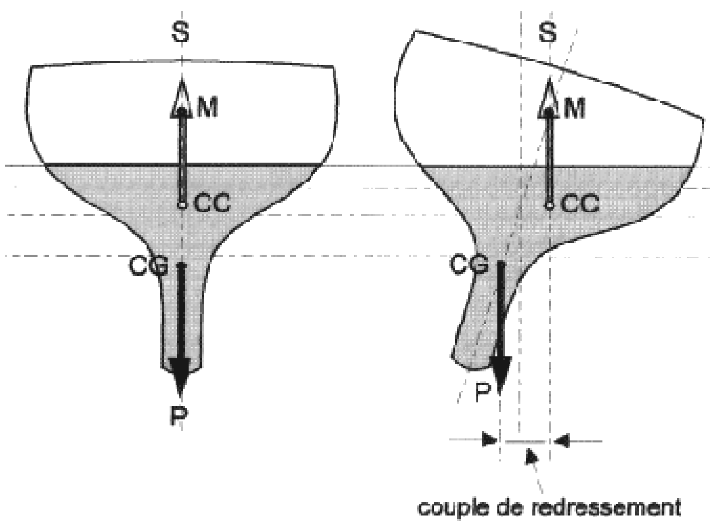


Flottaison et stabilité des bateaux

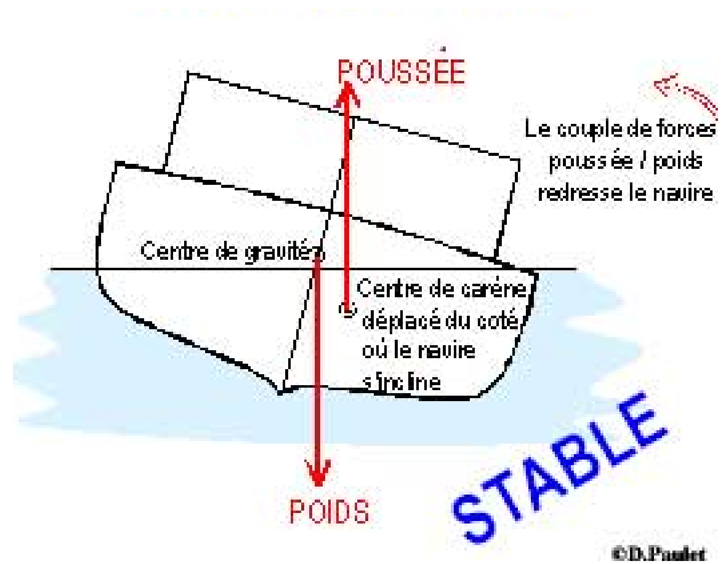
2 points importants :

- Point d’application du poids : *centre de gravité*
- Point d’application de la poussée d’Archimède : *centre de poussée* ou *centre de carène*

Centre de gravité au-dessous du centre de carène :
condition suffisante de stabilité, mais pas condition nécessaire de stabilité



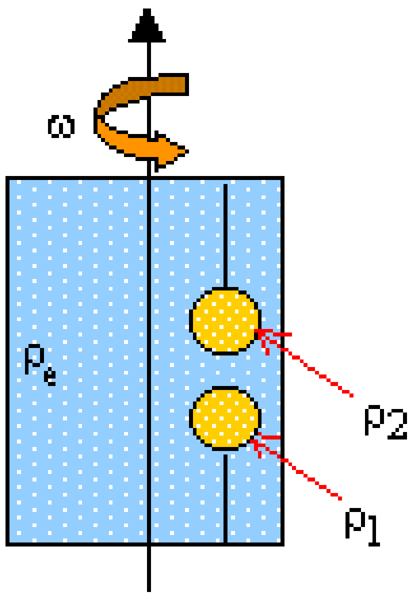
stable



stable sauf si trop de gite!

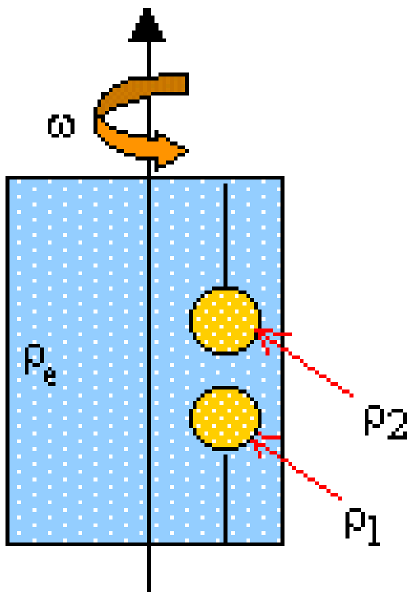
Hydrostatique en rotation

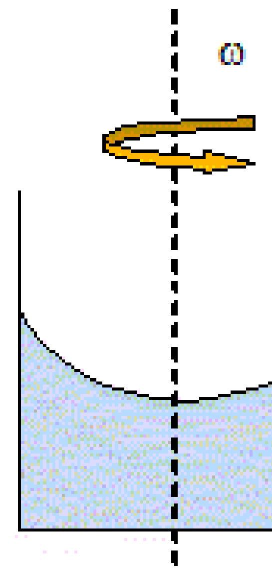
ou « Archimède m'a trompé » ?



Hydrostatique en rotation

ou « Archimède m'a trompé »?





$$\mathbf{g}_{eff} = \mathbf{g} + r\omega^2\mathbf{e}_r$$