Des corrigés[1] d'exercices de la feuille 1

Exercice 1

On a $f(x) = 1 + 2x^2 - x^3 + x^4\epsilon(x)$ avec $\epsilon(x) = 3x$ qui tend vers 0 quand x tend vers 0.

On a $g(x) = \Big(1 - (1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + x^4\epsilon(x))\Big)\Big(x^2 - \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x)\Big) = \frac{x^4}{2} + x^4\epsilon(x)$ où les fonctions ϵ sont toutes des fonctions de x qui tendent vers 0 quand x tend vers 0.

Plus difficile est : $h(x) = \frac{\sin(x^2)}{e^{x^2} - 1} = \frac{x^2 - \frac{x^6}{3!} + x^6\epsilon(x)}{x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + x^6\epsilon(x)} = \frac{1 - \frac{x^4}{6} + x^4\epsilon(x)}{1 + \Big(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + x^4\epsilon(x)\Big)} = \Big(1 - \frac{x^4}{6} + x^4\epsilon(x)\Big)\Big(1 - (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6}) + (\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6})^2 + x^4\epsilon(x)\Big) = \Big(1 - \frac{x^4}{6} + x^4\epsilon(x)\Big)\Big(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} + x^4\epsilon(x)\Big) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + x^4\epsilon(x)$. Là encore, les fonctions ϵ sont toutes des fonctions de x qui tendent vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 2

1. On a $\frac{\sin(x)}{x} \to \sin'(0) = \cos(0) = 1$ quand $x \to 0$, donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

   On a $x + \pi x^3 = x(1 + \pi x^2) \underset{x\to 0}{\sim} x$ et $x \underset{x\to 0}{\sim} \sin(x)$ donc $\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x + \pi x^3$.

2. On a $1 - \cos(x) = \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$, $2x + \sin(x) = 2x + x + x^2\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\sim} 3x$ et $\tan(x^3) = x^3 + x^3\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\sim} x^3$. On en déduit $\frac{(1 - \cos(x))(2x + \sin(x))}{x^4 + \tan(x^3)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^2}{2}\,3x}{x^3} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{3}{2}$. On a obtenu $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1 - \cos(x))(2x + \sin(x))}{x^4 + \tan(x^3)} = \frac{3}{2}$.

3. Grâce à la formule de Taylor-Young à l'ordre 1 (par exemple), on a $\arctan(u) = u + u\epsilon(u)$ avec $\epsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$. On rappelle aussi que $\lim\limits_{u\to+\infty} \arctan(u) = \frac{\pi}{2}$. On discute maintenant.

   a) Si $\alpha > 0$, on a $\arctan(x^\alpha) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^\alpha$ et $1 + x^\alpha \underset{x\to 0}{\sim} 1$ donc $\frac{\arctan(x^\alpha)}{1 + x^\alpha} \underset{x\to 0^+}{\sim} x^\alpha$.

   b) Si $\alpha < 0$, on a $x^\alpha \to +\infty$ quand $x \to 0^+$ donc $\arctan(x^\alpha) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2}$ et $1 + x^\alpha = x^\alpha(1 + 1/x^\alpha) \underset{x\to 0^+}{\sim} x^\alpha$, et finalement $\frac{\arctan(x^\alpha)}{1 + x^\alpha} \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{2x^\alpha}$.

Exercice 3

1. a) On développe $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x))}{x\ln(1+x)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2/2}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}$.

   Les croissances comparées disent que $\frac{\ln(1+x)}{x} \to 0$ quand $x \to +\infty$. On a donc $\frac{1}{\ln(1+x)} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\ln(1+x)}\Big(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\ln(x)}$.

   b) On a développe $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln(x + 1 + \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x)) = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{2} + x^2\epsilon(x) \underset{x\to 0}{\sim} x$.

   On a $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \ln(x) + \ln\Big(1 + \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}\Big)$. Comme $\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} = \sqrt{1 + 1/x^2} \to 1$ quand $x \to +\infty$, il vient $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) \underset{x\to+\infty}{\sim} \ln(x)$.

[1] Tout signalement d'erreur est le bienvenu.

2. On rappelle le développement limité en 0 : $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}u^2+u^2\epsilon(u)$ où $\epsilon(u)\to 0$ quand $u\to 0$. On développe $f(x)=(x^3+x^2)^{1/3}-\sqrt{x^2+ax} = x\Big[\Big(1+\dfrac{1}{x}\Big)^{1/3}-\Big(1+\dfrac{a}{x}\Big)^{1/2}\Big] = \dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{x}\Big(\dfrac{a^2}{8}-\dfrac{1}{9}\Big)+\dfrac{1}{x}\epsilon(1/x)$. On discute : si $a\neq\dfrac{2}{3}$, on a $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{3}-\dfrac{a}{2}$, et si $a=\dfrac{2}{3}$, on a $f(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{-1}{18x}$.

Exercice 4

La série de terme général $u_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ $(n\geq 1)$ est télescopique. En effet, on décompose $u_n=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$ qui s'écrit a_n-a_{n+1} avec $a_n=\dfrac{1}{n}$. On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}u_n=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_N-a_{N+1})=a_1-a_{N+1}=\frac{1}{1}-\frac{1}{N+1}\to 1$ quand $N\to+\infty$. On a montré que la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ converge et que sa somme vaut 1. (Voir le cours !)

Exercice 5

Soit a et b deux nombres réels. On considère la série numérique $\sum_{n\geq 1}u_n$ de terme général

$$u_n=\ln(n)+a\ln(n+1)+b\ln(n+2).$$

1. On a

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n)+a\ln\Big(n(1+1/n)\Big)+b\ln\Big(n(1+2/n)\Big)\\
&= (1+a+b)\ln(n)+a\ln\Big(1+1/n\Big)+b\ln\Big(1+2/n\Big)\\
&= (1+a+b)\ln(n)+a\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}\Big)+b\Big(\frac{2}{n}-\frac{1}{2}\Big(\frac{2}{n}\Big)^2\Big)+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\\
&= (1+a+b)\ln(n)+\frac{1}{n}(a+2b)-\frac{1}{n^2}(\frac{a}{2}+2b)+o\Big(\frac{1}{n^2}\Big).
\end{aligned}$$

   On obtient le développement de u_n demandé en posant $\alpha=1+a+b$, $\beta=a+2b$ et $\gamma=-\frac{a}{2}-2b$.

2. Si $\alpha=1+a+b$ est $\neq 0$, on a $u_n\sim(1+a+b)\ln(n)$ et u_n ne tend évidemment pas vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et la série $\sum_{n\geq 1}u_n$ ne peut donc converger. Il est donc nécessaire d'avoir $\alpha=1+a+b=0$. **On se place désormais dans ce cas**.
   Si maintenant, $\beta=a+2b$ est $\neq 0$, on a $u_n\sim\frac{a+2b}{n}$ qui est de signe fixe (celui de $a+2b$) pour n assez grand. Le critère d'équivalence s'applique donc, et comme la série $\sum 1/n$ diverge, on en déduit que $\sum u_n$ diverge. Il est donc nécessaire d'avoir $\beta=a+2b=0$. On se place donc dans ce cas.
   Réciproquement, si $\alpha=1+a+b=0$ et $\beta=a+2b=0$, on obtient $a=-2$ et $b=1$ et donc $u_n\sim\dfrac{-1}{n^2}$ qui est de signe fixe <0. Le critère d'équivalence s'applique donc, et comme $\sum 1/n^2$ est une série de Riemann convergente, on en déduit que la série $\sum u_n$ converge.
   On a démontré que la condition nécessaire et suffisante pour que $\sum u_n$ converge est que $a=-2$ et $b=1$.

3. On a donc

$$\begin{aligned}
u_n &= \ln(n)-2\ln(n+1)+\ln(n+2)\\
&= \Big(\ln(n)-\ln(n+1)\Big)-\Big(\ln(n+1)-\ln(n+2)\Big).
\end{aligned}$$

On voit donc que la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ est une somme télescopique et on obtient $S_n = \sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k) - \ln(k+1)\Big) - \Big(\ln(k+1) - \ln(k+2)\Big) = \Big(\ln(1) - \ln(2)\Big) - \Big(\ln(n+1) - \ln(n+2)\Big) = -\ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$. On fait tendre n vers $+\infty$ et on obtient

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = -\ln(2).$$

Exercice 6

Pour $\alpha > 0$ réel, on considère la série de terme général $u_n = \frac{(-1)^n}{\alpha n+1}$.

1. On a $\int_0^1 t^{\alpha n}\, dt = \left[\frac{t^{\alpha n+1}}{\alpha n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha n+1}$. On connait l'expression simple d'une somme de termes en progression géométrique : $\sum_{n=0}^{N} (-t^\alpha)^n = \frac{1-(-t^\alpha)^{N+1}}{1+t^\alpha}$. On intègre et on utilise la linéarité de l'intégrale pour en déduire la formule

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha} + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha}\, dt.$$

   On encadre $0 \leq \int_0^1 \frac{t^{\alpha(N+1)}}{1+t^\alpha}\, dt \leq \int_0^1 t^{\alpha(N+1)}\, dt = \frac{1}{\alpha(N+1)+1}$, terme qui tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$. On en déduit que la série de terme général u_n converge et qu'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\alpha}$.

2. Il suffit de connaitre des primitives de $\frac{1}{1+t}$ et $\frac{1}{1+t^2}$.

Exercice 7

On considère une suite réelle $(u_n)_{n\geq 1}$ décroissante, strictement positive.

1. Il s'agit d'une somme de n termes tous plus grands que u_{2n}.

2. a) On suppose que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. Donc la suite des sommes partielles (S_n) converge vers une certaine limite S (la somme de la série), où $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$. On en déduit que $\sum_{k=n+1}^{2n} u_k = S_{2n} - S_n$ tend vers $S - S = 0$ quand n tend vers $+\infty$. D'après la question 1, par comparaison, $2nu_{2n}$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On a aussi $0 \leq (2n+1)u_{2n+1} \leq (2n+1)u_{2n} \leq 3nu_{2n}$ (pour $n \geq 1$) et donc $(2n+1)u_{2n+1}$ tend aussi vers 0 quand $n \to +\infty$. Comme les suites $(2nu_{2n})$ et $((2n+1)u_{2n+1})$ convergent vers la même limite 0, on en déduit que la suite complète (nu_n) converge et que sa limite est 0.

   b) La réponse est non. Il suffit de considérer $u_n = \frac{1}{n\ln(n)}$, qui est le terme général d'une série de Bertrand divergente.

3. On suppose encore que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. On sépare, on rééchelonne et on regroupe : $\sum_{n=1}^{N} n(u_n - u_{n+1}) = \sum_{n=1}^{N} nu_n - \sum_{n=1}^{N} nu_{n+1} = \sum_{n=1}^{N} nu_n - \sum_{m=2}^{N+1}(m-1)u_m = u_1 + \sum_{n=2}^{N}\Big(n-(n-1)\Big)u_n - Nu_{N+1} = \sum_{n=1}^{N} u_n - Nu_{N+1}$. D'après 2a) le terme Nu_{N+1} tend vers 0 quand N tend vers $+\infty$, et on conclut.

Exercice 8

Soit a un réel > 0 et β un réel $> 1/2$.

1) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{1}{3}$ quand $n \to +\infty$, et on utilise le critère de d'Alembert pour conclure que la série $\sum u_n$ converge.

2) On a $u_n^{1/n} = \left(\dfrac{2n-1}{n+1}\right)^2 a \to 4a$ quand $n \to +\infty$, et on discute en utilisant le critère de Cauchy. Cependant, le cas $a = 1/4$ ne peut être tranché avec ce critère. On a dans ce cas, après mise en facteur de n et simplification, $u_n = \dfrac{(1-1/(2n))^{2n}}{(1+1/n)^{2n}} \to \dfrac{e^{-1}}{e^2} = e^{-3}$ quand $n \to +\infty$. Dans ce cas, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

3) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = (1+1/n)^{-n} \to e^{-1}$ quand $n \to +\infty$, et on utilise le critère de d'Alembert pour conclure que la série $\sum u_n$ converge.

4) On a $u_n = (1+1/n)^{-1/3} - (1+a/n)^{-1/2} = \left(\dfrac{a}{2} - \dfrac{1}{3}\right)\dfrac{1}{n} + \left(\dfrac{2}{9} - \dfrac{3a^2}{8}\right)\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{n^2}\epsilon(\dfrac{1}{n})$. Si $a \neq \frac{2}{3}$, on a $u_n \sim \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right)\frac{1}{n}$ qui est de signe fixe. Le critère d'équivalence s'applique et dit que la série $\sum u_n$ diverge. Si $a = \frac{2}{3}$, on a $u_n \sim \frac{1}{18n^2}$. Comme la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, la série $\sum u_n$ converge aussi, toujours par le critère d'équivalence.

5) On a $u_n = \frac{1}{n} e^{-\frac{\ln(n)}{n}} \sim \frac{1}{n}$. Comme la série de Riemann $\sum 1/n$ diverge, le critère d'équivalence implique que la série $\sum u_n$ diverge également.

6) On a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{1}{4}$. Le critère de d'Alembert dit alors que la série $\sum u_n$ converge.

7) On développe $u_n = 1 - n\Big(\ln(1+1/(2n)) - \ln(1-1/(2n))\Big) = -\frac{1}{12n^2} + \frac{1}{n^2}\epsilon(1/n) \sim -\frac{1}{12n^2} < 0$. Le critère d'équivalence s'applique et dit que, puisque la série de Riemann $\sum 1/n^2$ converge, la série $\sum u_n$ converge également.

8) On a $0 < u_n \sim \frac{1}{n^{6/5}\big(\ln(n)\big)^{-2}}$. Ce dernier terme est le terme général d'une série de Bertrand convergente. Par le critère d'équivalence, la série $\sum u_n$ converge donc.

9) On cherche un équivalent de u_n. On a $u_n = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2n^{2\beta}} + \frac{1}{n^{2\beta}}\epsilon(1/n)\Big)^n = 1 - \exp\Big(n\ln\Big(1 - \frac{1}{2n^{2\beta}} + \frac{1}{n^{2\beta}}\epsilon(1/n)\Big)\Big) = 1 - \exp\Big(-\frac{1}{2n^{2\beta-1}} + \frac{1}{n^{2\beta-1}}\epsilon(1/n)\Big) = 1 - \Big(1 - \frac{1}{2n^{2\beta-1}} + \frac{1}{n^{2\beta-1}}\epsilon(1/n)\Big) \sim \frac{1}{2n^{2\beta-1}}$. Les séries de terme général u_n et de terme général $\frac{1}{2n^{2\beta-1}}$ sont de même nature par le critère d'équivalence. On en déduit que si $1/2 < \beta \leq 1$ la série $\sum u_n$ diverge, et si $1 < \beta$, la série $\sum u_n$ converge.

Exercice 9

Si $\alpha \leq 0$, on voit que u_n ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty$ et donc la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

On remarque que si $\alpha = 1$, on a $u_n = \dfrac{1}{n}$ et la série $\sum u_n$ diverge. Si $\alpha < 1$, on a $-\ln(n) \leq -(\ln(n))^\alpha$, donc $\dfrac{1}{n} \leq u_n$. Comme la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge, par comparaison la série $\sum u_n$

diverge également.

Si $\alpha > 1$, on considère $n^2 u_n = \exp(2\ln(n) - (\ln(n))^\alpha) = \exp(-(\ln(n))^\alpha[1 - 2(\ln(n))^{1-\alpha}])$ qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Il existe donc une constante $C > 0$ telle que $0 \leq u_n \leq C/n^2$ pour tout $n \geq 1$ (car une suite qui tend vers 0 est bornée.) Grâce au critère de comparaison et parce que la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, on en déduit que $\sum u_n$ converge également.

Exercice 10

1. a) Puisque la fonction $t \mapsto 1/t$ est décroissante sur $[1, +\infty[$, on a $\dfrac{1}{k+1} \leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$ pour tout $k \geq 1$. On calcule l'intégrale pour conclure.

   b) On en déduit d'une part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n)$ et donc $H_n - 1 \leq \ln(n)$ et d'autre part $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \Big(\ln(k+1) - \ln(k)\Big) = \ln(n+1) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = H_n$.

   On a donc l'encadrement

   $$\ln(n+1) = \ln\Big(n(1+1/n)\Big) = \ln(n) + \ln(1+1/n) = \ln(n)\Big(1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)}\Big) \leq H_n \leq \ln(n) + 1.$$

   On en déduit
   $$1 + \frac{\ln(1+1/n)}{\ln(n)} \leq \frac{H_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

   et grâce au théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{H_n}{\ln(n)} = 1$ et donc $H_n \sim \ln(n)$ quand $n \to +\infty$.

2. On simplifie $u_{k+1} - u_k = \dfrac{1}{k+1} - \ln(k+1) + \ln(k) = \dfrac{1}{k+1} + \ln(1 - \dfrac{1}{k+1}) = \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{k+1} - \dfrac{1}{2(k+1)^2} + o\Big(\dfrac{1}{(k+1)^2}\Big) \sim -\dfrac{1}{2(k+1)^2} \sim -\dfrac{1}{2k^2}$. Le signe de cette expression est fixe (négatif), on peut appliquer le théorème d'équivalence. Comme la série de Riemann $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge, la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(u_{k+1} - u_k)$ converge également.

3. On a $(*)$: $u_n = u_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{n-1}(u_{k+1} - u_k)$ par télescopage. Comme la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1}(u_{k+1} - u_k)$ converge d'après la question 2, la suite de ses sommes partielles aussi et donc la suite (u_n) aussi d'après $(*)$.

4. a) On écrit en commençant par regrouper les n termes positifs d'une part et les n termes négatifs d'autre part

   $$\begin{aligned} S_{2n} &= \Big(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\Big) - \Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\ &= \Big(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\Big) - 2\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2n}\Big) \\ &= H_{2n} - H_n \end{aligned}$$

   On en déduit $S_{2n} = \Big(\ln(2n) + \gamma + \epsilon_{2n}\Big) - \Big(\ln(n) + \gamma + \epsilon_n\Big) = \ln(2) + \epsilon_{2n} - \epsilon_n$. La suite (S_{2n}) converge donc vers $\ln(2)$.

   b) On a par ailleurs $S_{2n+1} = S_{2n} + \dfrac{1}{2n+1}$. La suite (S_{2n+1}) converge donc également vers $\ln(2)$. On en déduit que c'est toute la suite (S_n) qui converge vers $\ln(2)$. On a prouvé que la série anharmonique $\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ converge (ce résultat pouvait s'obtenir aussi en utilisant le critère spécial des séries alternées) et que sa somme vaut $\ln(2)$. (On peut démontrer ce dernier résultat en utilisant une autre méthode qui consiste à écrire un développement de Taylor-Lagrange de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.)

Exercice 11

On pose $u_n = \dfrac{1}{\ln(n) + (-1)^n n}$ pour $n \geq 1$.

1. On calcule la différence $v_n = u_n - \dfrac{(-1)^n}{n} = \dfrac{n - (-1)^n \ln(n) - (-1)^{2n} n}{n(\ln(n) + (-1)^n n)} = \dfrac{-(-1)^n \ln(n)}{n(\ln(n) + (-1)^n n)} = \dfrac{-\ln(n)}{n^2\left(1 + \frac{(-1)^n \ln(n)}{n}\right)}$.

   On en déduit l'équivalent $v_n \sim \dfrac{-\ln(n)}{n^2}$. Or $\dfrac{-\ln(n)}{n^2}$ est le terme général d'une série de Bertrand convergente. Comme $\dfrac{-\ln(n)}{n^2}$ est toujours < 0 (il a un signe fixe), le critère d'équivalence s'applique et dit que la série $\sum v_n$ converge également.

2. On a $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + v_n$ pour tout $n \geq 1$. On examine les deux termes dans cette décomposition de u_n. (Remarque sur la méthode exposée dans cet exercice : on a "éclaté" u_n en l'écrivant comme somme de son équivalent simple $\dfrac{(-1)^n}{n}$ et d'un reste qu'on a appelé v_n.)

   $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est le terme général d'une série alternée convergente. En effet ce terme général vérifie les 3 hypothèses du critère des séries alternées. Vérifiez les soigneusement.

   On a vu dans la question précédente que v_n est le terme général d'une série convergente.

   On en déduit que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 12

On pose $v_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt$. On réécrit v_n pour faire apparaitre son "côté alterné". Après le changement de variable $t = u + n\pi$, on obtient (en utilisant $\sin(u + n\pi) = (-1)^n \sin(u)$) :

$$v_n = \int_0^\pi \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi}\, du = (-1)^n \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi}\, du$$

avec $\dfrac{\sin(u)}{u + n\pi} > 0$ sur $]0, \pi[$. On en déduit que la série $\sum v_n$ est bien alternée. Vérifions les 2 autres hypothèses du critère des séries alternées.

- On a $|v_n| = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u + n\pi}\, du \leq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{n\pi}\, du = \frac{2}{n\pi}$ ce qui entraine $\lim_{n\to+\infty} |v_n| = 0$.
- On regarde le signe de la différence $|v_n| - |v_{n+1}|$:

  $$|v_n| - |v_{n+1}| = \int_0^\pi \sin(u)\left[\frac{1}{u + n\pi} - \frac{1}{u + (n+1)\pi}\right] du = \int_0^\pi \sin(u)\left[\frac{\pi}{(u + n\pi)(u + (n+1)\pi)}\right] du$$

  qui est clairement > 0 (car l'intégrande est > 0 sur $]0, \pi[$). Donc la suite $(|v_n|)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Le critère spécial des séries alternées s'applique donc et la série $\sum v_n$ converge.

Pour ce qui concerne la convergence absolue, on voit que

$$\begin{aligned} |v_n| = \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{u+n\pi}\,du &\geq \int_0^\pi \frac{\sin(u)}{(n+1)\pi}\,du \\ &\geq \frac{2}{(n+1)\pi} \end{aligned}$$

Comme la série $\sum \dfrac{2}{(n+1)\pi}$ diverge (par exemple parce que $\dfrac{2}{(n+1)\pi} \sim \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{n}$ et que la série harmonique $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge) , on en déduit grâce au critère de comparaison que la série $\sum |v_n|$ diverge également.

Exercice 13

On pose $v_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha + (-1)^n}$ $(n \geq 2)$. On remarque déjà que si $\alpha \leq 0$ le terme général v_n ne tend pas vers 0 et la série $\sum v_n$ diverge donc grossièrement. On suppose dorénavant que $\alpha > 0$.

On reprend la méthode exposée dans l'exercice 12 :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{(-1)^n}{n^\alpha\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)} &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\left[1 - \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + \frac{1}{n^\alpha}\epsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\ &= \frac{(-1)^n}{n^\alpha} + w_n \end{aligned}$$

avec $w_n = -\dfrac{1}{n^{2\alpha}}\left[1+\epsilon\left(\dfrac{1}{n}\right)\right] \sim -\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$. On discute :

- Si $\alpha > 1/2$, $\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente. Comme $-\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ est toujours < 0, le critère d'équivalence s'applique et dit que la série $\sum w_n$ converge. Par ailleurs $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série alternée convergente (vérifiez-le !) On en déduit que la série $\sum v_n$ est convergente.

- Si $0 < \alpha \leq 1/2$, $\dfrac{1}{n^{2\alpha}}$ est le terme général d'une série de Riemann divergente. Toujours grâce au critère d'équivalence, on en déduit que la série $\sum w_n$ diverge. Ainsi u_n est la somme du terme général $\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ d'une série alternée convergente et du terme général w_n d'une série divergente. On en déduit que la série $\sum v_n$ est divergente.

Pour ce qui concerne la convergence absolue, on sait que $v_n \sim \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ donc $|v_n| \sim \dfrac{1}{n^\alpha}$. Or $\dfrac{1}{n^\alpha}$ est le terme général d'une série de Riemann convergente si et seulement si $\alpha > 1$. Par le critère d'équivalence, on en déduit que la série $\sum v_n$ converge absolument si et seulement si $\alpha > 1$.