Université Paris Saclay | **MDD 102**
L1S1 | **Algèbre**

Feuille d'exercices 1. Corrigé

Logique et raisonnements

Exercice 1.1. Écrire les énoncés suivants en utilisant les symboles logiques :
1. Le carré de tout réel est positif.
2. Certains réels sont supérieurs à leur carré.
3. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
4. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
5. Il existe un entier multiple de tous les autres.
6. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
7. Étant donné trois réels, il en existe au moins deux de même signe.

Exercice 1.2. Dire si chacun des énoncés suivant est vrai ou faux.
1. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
2. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ 2x + y > 0$
5. $\exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R}\ y^2 > x$
6. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (2x + y > 0 \text{ ou } 2x + y = 0)$
7. $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ (2x + y > 0 \text{ et } 2x + y = 0)$

Exercice 1.3. Tautologies
Montrer que les énoncés suivant sont des tautologies.
1. $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
2. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow ((Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
3. $P \Rightarrow ((\text{non } P) \Rightarrow Q)$
4. $(\forall x\ (P(x) \text{ ou } Q(x))) \Rightarrow ((\forall x\ P(x)) \text{ ou } (\exists x\ Q(x)))$
5. $(\forall x\ (P(x) \Rightarrow Q(x))) \Rightarrow ((\exists x\ P(x)) \Rightarrow (\exists x\ Q(x)))$

Exercice 1.4. Équivalences
Montrer que :
1. P et Q est équivalent à Q et P
2. P ou P est équivalent à P
3. P ou Q est équivalent à $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$
4. $P \Leftrightarrow Q$ est équivalent à non $((\text{non } P) \Leftrightarrow Q)$

5. $P \Rightarrow (Q \text{ ou } R)$ est équivalent à Q ou $(P \Rightarrow R)$

Réponse : On peut dresser les tables de vérité. On omet 1 et 2, qui sont immédiats.

3.

P	Q	P ou Q	P $\Rightarrow$ Q	(P $\Rightarrow$ Q) $\Rightarrow$ Q
0	0	0	1	0
1	0	1	0	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Les valeurs de vérité de P ou Q d'une part et de $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ d'autre part sont les mêmes.

4.

P	Q	P $\Leftrightarrow$ Q	((non P) $\Leftrightarrow$ Q)	non ((non P) $\Leftrightarrow$ Q)
0	0	1	0	1
1	0	0	1	0
0	1	0	1	0
1	1	1	0	1

Les valeurs de vérité de $P \Leftrightarrow Q$ d'une part et de non ((non P) $\Leftrightarrow Q$) d'autre part sont les mêmes.

5. On peut encore utiliser une table de vérité ou alors utiliser des équivalences déjà connues, en particulier le fait que $U \Rightarrow V$ est équivalent à (non U) ou V. Ainsi, $P \Rightarrow (Q$ ou $R)$ est équivalent à (non P) ou (Q ou R), qui est équivalent à Q ou ((non P) ou R), qui est équivalent à Q ou $(P \Rightarrow R)$.

Exercice 1.5. Négation

1. Montrer que non $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à P et non Q.

2. En utilisant l'écriture $\forall x\ (x \in X \Rightarrow P(x))$ pour $\forall x \in X\ P(x)$, donner une écriture équivalente pour non $(\forall x \in X\ P(x))$.

Exercice 1.6. Négation

Donner des formulations simples des négations des énoncés suivants :

1. $1 \leq x \leq 3$

2. $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \geq x_0\ f(x) > A$

3. $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$

Exercice 1.7. Négation

1. Donner une formulation équivalente de l'énoncé $\exists! x\ P(x)$ (il existe un unique x tel que $P(x)$) sans utiliser le symbole !.

2. Donner une formulation simple de la négation de l'énoncé donné à la question précédente.

Réponse : 1. On peut signaler deux formulations, bien sûr équivalentes entre elles :

$$(\exists x\ P(x)) \text{ et } (\forall x\ \forall y\ ((P(x) \text{ et } P(y)) \Rightarrow x = y))$$

$$\exists x\ (P(x) \text{ et } (\forall y\ (x \neq y \Rightarrow \text{non } P(y))))$$

2. En utilisant les interactions connues entre la négation et les autres connecteurs logiques, on peut écrire la négation de chacune des deux formulations précédentes :

$$(\forall x \text{ non } P(x)) \text{ ou } (\exists x\ \exists y\ (P(x) \text{ et } P(y) \text{ et } x \neq y))$$

$$\forall x \text{ (non } P(x) \text{ ou } (\exists y\ (x \neq y \text{ et } P(y))))$$

Exercice 1.8. Montrer que les énoncés suivants ne sont pas des tautologies (indication : on pourra utiliser pour $P(x)$ et $Q(x)$ des énoncés du type $x \geq a$ pour des valeurs de a bien choisies).

1. $((\exists x\ P(x)) \text{ et } (\exists x\ Q(x))) \Rightarrow (\exists x\ (P(x) \text{ et } Q(x)))$

2. $(\forall x\ (P(x) \text{ ou } Q(x))) \Rightarrow ((\forall x\ P(x)) \text{ ou } (\forall x\ Q(x)))$

Exercice 1.9. Raisonnement par disjonction des cas

1. Montrer que $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$ est une tautologie.

2. Application :

a. Montrer que pour tout entier impair n, il existe un entier k tel que $n = 4k + 1$ ou il existe un entier k tel que $n = 4k + 3$.

b. En déduire que pour tout entier impair n, il existe un entier m tel que $n^2 = 8m + 1$.

Exercice 1.10. Contraposition

Soit un réel x. Montrer que : $(\forall \epsilon > 0\ |x| \leq \epsilon) \Rightarrow x = 0$.

Exercice 1.11. Démonstration par l'absurde

Soit $n \geq 1$ et $x_0, \ldots, x_n$ $n+1$ nombres réels tels que $0 < x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n < 1$. On veut montrer par l'absurde l'énoncé P : il existe deux réels parmi $x_0, \ldots, x_n$ qui sont distants de moins de $\frac{1}{n}$ l'un de l'autre.

1. Réécrire l'énoncé P en utilisant les symboles logiques.

2. Écrire la négation de P.

3. Démontrer par l'absurde que P est vrai.

Réponse : 1.

$$P \quad : \quad \exists i\ \exists j\ (0 \leq i < j \leq n \text{ et } x_j - x_i \leq \frac{1}{n})$$

2.

$$\text{non } P \quad : \quad \forall i\ \forall j\ (\text{non } (0 \leq i < j \leq n) \text{ ou non } x_j - x_i \leq \frac{1}{n}))$$

C'est équivalent à :

$$\forall i\ \forall j\ ((0 \leq i < j \leq n) \Rightarrow x_j - x_i > \frac{1}{n}))$$

3. Si non P est vrai, on trouve en particulier que pour tout i entre 0 et $n-1$, en choisissant $j = i+1$, $x_{i+1} - x_i > \frac{1}{n}$. On peut additionner ces n inégalités (i variant entre 0 et $n-1$) : les x_i se simplifient deux à deux, sauf x_0 et x_n, et il reste $x_n - x_0 > n \times \frac{1}{n} = 1$. C'est impossible car x_0 et x_n sont dans $]0, 1[$, donc la distance entre les deux ne peut pas être > 1. Ainsi non P ne peut pas être vrai, donc P est vrai.

Exercice 1.12. Démonstrations par récurrence

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0^2 + 1^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $n! \leq n^n$ (on rappelle que $n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$).

Exercice 1.13. Une variante des démonstrations par récurrence
1. Soit $P(n)$ un énoncé qui dépend d'un entier $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(0)$ est vrai et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vrai. Montrer que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Indication : on pourra introduire l'énoncé $Q(n) : \forall m \leq n \; P(m)$.
2. Application : montrer que tout entier $n \geq 2$ peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
Réponse : 1. On introduit l'énoncé $Q(n) : \forall m \leq n \; P(m)$ comme indiqué. On va montrer que $Q(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$ par réccurence.
Initialisation : $Q(0)$ est vrai car c'est équivalent à $P(0)$ (car 0 est le seul $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \leq 0$).
Hérédité : on suppose que $Q(n)$ est vrai, c'est-à-dire $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$. D'après ce qu'on suppose pour P, on en déduit que $P(n+1)$ est vrai. En utilisant encore une fois $Q(n)$, on obtient que $P(0), \ldots, P(n), P(n+1)$ sont vrais, c'est-à-dire $Q(n+1)$ est vrai.
On a donc montré par récurrence que $Q(n)$ est vrai pour tout n. Or $Q(n)$ implique $P(n)$ (prendre $m = n$), donc $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $P(n)$ l'énoncé : $n \geq 2 \Rightarrow n$ peut être écrit sous la forme d'un produit de nombres premiers.
On va montrer que P satisfait les hypothèses de la question 1 (que l'on appelle récurrence forte).
Initialisation : $P(0)$ est vrai car $0 \geq 2$ est faux.
Hérédité forte : on suppose que $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$ et on veut montrer que $P(n+1)$ est vrai. Si $n+1 < 2$, c'est bon car la prémisse est fausse. On suppose maintenant $n+1 \geq 2$. Si $n+1$ est un nombre premier, il n'y a rien à faire ($n+1$ est le produit d'un seul nombre premier). Sinon, il existe deux entiers m_1 et m_2, compris strictement entre 1 et $n+1$, tels que $n = m_1 m_2$. Comme $m_1 \leq n$, $P(m_1)$ est vrai par hypothèse, et comme $m_1 \geq 2$, m_1 est un produit de nombres premiers. Même chose pour m_2 : c'est un produit de nombres premiers. Et comme $n+1 = m_1 m_2$, $n+1$ est aussi un produit de nombres premiers : $P(n+1)$ est vrai.
Donc d'après la question 1, $P(n)$ est vrai pour tout entier n : c'est ce qu'on voulait.

Exercice 1.14. Soit X un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$. Le but est de montrer que X admet un plus petit élément. On suppose par l'absurde que X n'admet pas de plus petit élément. On pose $P(n) : n \notin X$.
1. Montrer que $P(0)$ est vrai.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$, alors $P(n+1)$ est vrai.
3. Conclure en utilisant l'exercice précédent.
Réponse : 1. Si $P(0)$ est faux, alors $0 \in X$. Mais pour tout entier naturel n, en particulier ceux dans X, $0 \leq n$, donc 0 devrait être le plus petit élément de X, ce qui est impossilbe par hypothèse. Donc $P(0)$ est vrai.
2. Supposons que $P(m)$ est vrai pour tout $m \leq n$, on veut montrer que $P(n+1)$ est vrai. Si $P(n+1)$ est faux, $n+1 \in X$. Or on a fait l'hypothèse que si $m \leq n$, $m \notin X$: il n'y a pas d'éléments dans X qui spont $\leq n$, donc ils sont tous $\geq n+1$, c'est-à-dire $n+1$ est le plus petit élément de X. Comme c'est impossilbe, c'est que $P(n+1)$ est vrai.
3. On a donc montré, en supposant que X n'a pas de plus petit élément, que P satisfait la condition pour la récurrence forte de l'exercice précédent, et donc que $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi X ne contient aucun entier naturel, donc X est vide. C'est contraire à l'hypothèse X non vide, donc l'hypothèse X n'a pas de plus petit élément est fausse, c'est ce qu'on voulait.

Exercice 1.15. Les raisonnnements suivants sont ils valides ? On pourra si besoin réécrire les

énoncés en utilisant les connecteurs logiques.
1. Si les poules ont des dents, alors les poules sont des mammifères. Or les poules ne sont pas des mammifères. Donc les poules n'ont pas de dents.
2. Pour que Pierre réussisse le cours d'algèbre, il est nécessaire et suffisant que les trois conditions suivantes soient réunies : qu'il assiste au cours, qu'il ne bavarde pas avec sa voisine et qu'il écoute le professeur. Mais s'il écoute le professeur, c'est qu'il assiste au cours et qu'il ne bavarde pas avec sa voisine. Donc il est nécessaire et suffisant que Pierre écoute le professeur pour qu'il réussisse le cours d'algèbre.
3. Si Pierre vient à la fête, alors Marie est triste. Si Marie est triste, alors Jean ne vient pas à la fête. Si Jean ne vient pas à la fête, alors Pierre ne vient pas non plus. Donc Pierre ne vient pas à la fête.
Réponse : 1. P : les poules ont des dents. Q : les poules sont des mammifères.
On nous dit que $P \Rightarrow Q$ et non Q sont vrais. Par contraposée, (non Q) $\Rightarrow$ (non P) est vrai,et donc non P aussi par modus ponens : le raisonnement est valide.
2. P : Pierre réussit le cours d'algèbre. Q : il assiste au cours. R : il ne bavarde pas avec sa voisine. S : il écoute le professeur.
On nous dit que $P \Leftrightarrow (Q$ et R et $S)$, et aussi que $S \Rightarrow (Q$ et $R)$.
En particulier, $P \Rightarrow (Q$ et R et $S)$, et $(Q$ et R et $S) \Rightarrow S$ (tautologie). Donc $P \Rightarrow S$ est vrai. Pour la réciproque, si S est vrai, Q et R le sont aussi par hypothèse, donc Q et R et S est vrai. Or $(Q$ et R et $S) \Rightarrow P$, donc P est vrai. Donc $P \Leftrightarrow S$ est vrai, le raisonnement est valide.
3. P : Pierre vient à la fête. Q : Marie est triste. R : Jean ne vient pas à la fête.
On nous dit que $P \Rightarrow Q$, $Q \Rightarrow R$ et $R \Rightarrow$ (non P) sont vrais.
Supposons par l'absurde que P soit vrai. Alors Q aussi, donc R aussi, donc non P aussi. Ainsi P et non P sont tous les deux vrais, ce qui est impossible. Donc P est faux : le raisonnement est valide.

Exercice 1.16. Une énigme
Un voyageur perdu dans le désert arrive à une bifurcation à partir de laquelle la piste se divise en deux. Chaque piste peut soit mener à une oasis, soit se perdre dans le désert. Chaque piste est gardée par un sphinx.
Le sphinx de droite dit : "Une au moins des deux pistes conduit à une oasis."
Le sphinx de gauche dit : "La piste de droite se perd dans le désert."
Soit les deux sphinx disent la vérité, soit ils mentent tous les deux.
Le voyageur voudrait savoir si une piste mène vers une oasis, et si oui, laquelle.
1. Traduire les données du problème en utilisant des connecteurs logiques.
2. Résoudre l'énigme.
Réponse : 1. P_1 : la piste de doite mène à une oasis. P_2 : la piste de gauche mène à une oasis. Ainsi, non P_1 est équivalent à : la piste de droite se perd dans le désert, et même chose pour non P_2 avec la piste de gauche.
S_1 : P_1 ou P_2. S_2 : non P_1.
Enfin, on a $S_1 \Leftrightarrow S_2$.
2. Si S_1 est vrai, S_2 aussi, donc P_1 est faux. Or S_1 nous dit que P_1 ou P_2 est vrai, donc la seule possibilité est que P_2 soit vrai.
Si S_1 est faux, S_2 aussi. Or non S_1 dit que P_1 et P_2 sont tous les deux faux, et non S_2 dit que P_1 est vrai : c'est incompatible. Donc S_1 ne peut pas être faux.
On conclut que P_2 est vrai : la piste de gauche mène à une oasis.