Contrôle des connaissances 1

Logique, raisonnements, ensembles, applications

La semaine du 7 octobre 2024, en séance de TD, votre enseignant.e vous soumettra quatre exercices, choisis dans la liste ci-dessous. Vous aurez une heure pour y répondre. Le barème est de cinq points par exercice.

Exercice 1.1. Dresser la table de vérité de l'énoncé

$$((P \Leftrightarrow Q) \text{ et } (Q \Leftrightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Leftrightarrow R)$$

S'agit-il d'une tautologie ?

Exercice 1.2. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 6$, $2^n \geq 6n + 7$.

Exercice 1.3. On veut démontrer par l'absurde qu'il n'existe pas de réel x tel que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. On pourra utiliser dans la suite le résultat suivant : l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 - 1$ est injective.
1. Développer $(x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$.
2. On suppose par l'absurde qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. Montrer alors que $x = 1$.
3. Conclure.

Exercice 1.4. Soit une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que :
f est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ f(x) \leq M$
f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ ssi $\forall A \in \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \geq x_0\ f(x) \geq A$
On suppose que f est définie par $f(x) = x \sin(x)$. Montrer que f n'est pas majorée et que f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.

Exercice 1.5. Soit X un ensemble. Pour A un sous-ensemble de X, on définit la fonction indicatrice de A :

$$\begin{array}{rccl} \mathbf{1}_A & : & X & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Exprimer la fonction indicatrice de A^c en fonction de $\mathbf{1}_A$.
2. Soient A et B deux sous-ensembles de X. Montrer que

$$A \subset B \text{ ssi } \forall x \in X\ \mathbf{1}_A(x) \leq \mathbf{1}_B(x)$$

3. En utilisant les questions précédentes, redémontrer que

$$A \subset B \text{ ssi } B^c \subset A^c$$

Exercice 1.6. On se place dans un ensemble X.
1. Soit A un sous-ensemble de X. Calculer $(A^c)^c$.
2. Soit l'application

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathcal{P}(X) & \rightarrow & \mathcal{P}(X) \\ & & A & \mapsto & A^c \end{array}$$

Montrer que f est bijective et déterminer son application réciproque.

Exercice 1.7. Pour trois ensembles X, Y_1, Y_2, on s'intéresse à l'énoncé

$$P(X, Y_1, Y_2) \ : \ (X \subset Y_1 \cup Y_2) \Rightarrow (X \subset Y_1 \text{ ou } X \subset Y_2)$$

1. On suppose que $\mathrm{card}(X) = 0$. Montrer que pour tous ensembles Y_1 et Y_2, $P(X, Y_1, Y_2)$ est vrai.
2. On suppose que $\mathrm{card}(X) = 1$. Montrer que pour tous ensembles Y_1 et Y_2, $P(X, Y_1, Y_2)$ est vrai.
3. On suppose que X est un ensemble fini de cardinal ≥ 2. Est-ce que pour tous ensembles Y_1 et Y_2, $P(X, Y_1, Y_2)$ est vrai ?

Exercice 1.8. Soient X et Y deux ensembles, A un sous-ensemble de X et B un sous-ensemble de Y.
1. Montrer que $(X \times Y) \setminus (A \times B) = (X \times (Y \setminus B)) \cup ((X \setminus A) \times Y)$.
2. Montrer que $(X \times (Y \setminus B)) \cap ((X \setminus A) \times Y) = (X \setminus A) \times (Y \setminus B)$.
3. On pose $X = Y = [0, 2]$ et $A = B = [0, 1]$. Représenter dans le plan les ensembles des questions précédentes.

Exercice 1.9. Soient une application $f : X \rightarrow Y$, A_1 et A_2 deux sous-ensembles de X, B_1 et B_2 deux sous-ensembles de Y. Montrer que :
1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Est-ce que $f(\mathbb{R}_- \cap \mathbb{R}_+) = f(\mathbb{R}_-) \cap f(\mathbb{R}_+)$? Justifier la réponse.

Exercice 1.10. Soit X un ensemble non vide et $\mathcal{P}_2$ l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de X avec 1 ou 2 éléments. Soit l'application

$$\begin{array}{ccccc} f & : & X^2 & \rightarrow & \mathcal{P}_2 \\ & & (x, y) & \mapsto & \{x, y\} \end{array}$$

1. Montrer que f est surjective.
2. Soit $Y \in \mathcal{P}_2$. Déterminer $f^{-1}(\{Y\})$, et préciser son cardinal en fonction du cardinal de Y.