Évolution des conceptions de l'Univers (Phys137)

TD 2

Exercice 1 : satellite géostationnaire

Un satellite géostationnaire est par définition fixe dans le référentiel de la Terre en rotation. C'est à dire qu'un observateur sur terre voit le satellite sous la forme d'un point immobile dans le ciel.

1. Quelle est la période orbitale T d'un tel satellite ?

T = 24h = 86400 s

2. À partir de la 3ème loi de Kepler, calculez le rayon R de l'orbite géostationnaire d'un satellite de masse m = 2300 kg.

$$\frac{T^2}{R_{Geo}^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_T + m)} \Rightarrow R_{Geo} = \left(\frac{T^2 G(M_T + m)}{4\pi^2}\right)^{1/3} \Rightarrow R_{Geo} = 42000 \text{ km}$$

Et cela correspond donc à une altitude de (42000 - 6400) km

3. Et pour un satellite de masse m = 4600 kg ?

Pas la peine de faire de calcul car $m \ll M_T$

Exercice 2 : vitesse de libération

Jetez une pierre en l'air et elle retombe. Lancez-la plus fort et elle monte plus haut avant de retomber. En la lançant suffisamment fort, pourrait-on lui faire quitter l'attraction terrestre? C'était l'idée d'engin spatial de Jules Verne : une capsule lancée avec un canon à la bonne vitesse échapperait à la gravité terrestre et pourrait ainsi partir dans l'espace interplanétaire. Formellement, un objet lié gravitationnellement à la Terre se trouve dans un "puits de potentiel". Pour sortir de ce puits, il faut une énergie cinétique au moins égale à l'énergie potentielle gravitationnelle, notée E_p et valant

$$E_p = \frac{GM_T m}{r},$$

où G est la constante de gravitation, M_T la masse de la Terre, m la masse de l'objet et r la distance de l'objet au centre de la Terre.

1. Quelle est donc la vitesse minimale pour s'extraire de la gravité terrestre ?

On pose $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{GM_Tm}{r}$ => $v = \sqrt{2GM_T/r}$

Avec $r = R_T$ on obtient v = 11,2 km/s.

2. En supposant que la Lune est sur une orbite circulaire de rayon R_L = 384000 km et que sa période orbitale T_L = 27,3 jours, calculer sa vitesse v_L.

$v_L = 2\pi R_L/T_L$ => $v_L = 1022$ m/s

3. Quelle devrait être sa vitesse minimale v_{L-Lib} pour s'échapper de l'attraction terrestre ? A quelle quantité d'énergie cinétique ΔE_C cela correspond-il ?

$v_{L-Lib} = \sqrt{2GM_T/R_L}$ => $v_{L-Lib} = 1444$ m/s

$\Delta E_C = \frac{1}{2}M_L(v_{L-Lib}^2 - v_L^2)$ => $\Delta E_C = 3{,}8\ 10^{28}$ Joules

Energie d'une bombe H des plus puissantes : 10^{17} Joules.

Exercice 3 : Vérification rapide des 2ème et 3ème loi de Kepler

La 2ème loi

Préambule 1 : le produit vectoriel

Le produit vectoriel de 2 vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est tel que la norme du produit vérifie :

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\widehat{\vec{u},\vec{v}})|$$

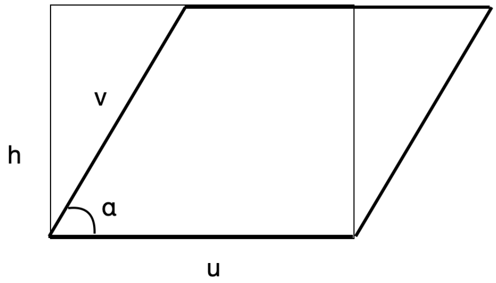
Préambule 2 : le moment cinétique

On définit le moment cinétique $\vec{L}$ d'un objet (ponctuel) par :

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

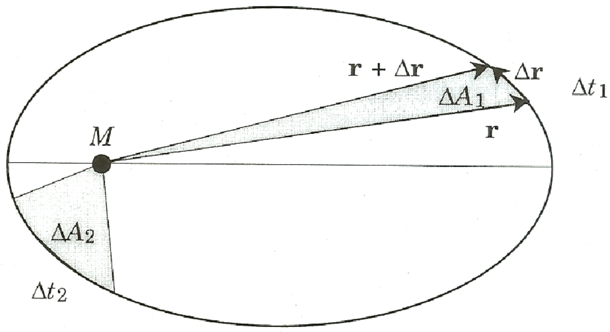
où $\vec{r}$ est la position et $\vec{v}$ la vitesse et m la masse.
Dans le cas d'une force centrale (comme la gravité), $\vec{L}$ est constant.

1. A partir du Préambule 1 et du schéma ci-dessous, montrer que la norme du produit vectoriel est égale à la surface du parallélogramme formé par les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.



$S = u \times h = u \times v \sin(\alpha)$

2. En déduire les surfaces ΔA_1 ci-dessous en fonction de r et Δr.



On considère le parallélogramme formé par $\vec{r}$ et $\overrightarrow{\Delta r}$. La surface que l'on cherche est géométriquement la moitié de ce parallélogramme. D'après la question 1, on a : $\Delta A_1 = \frac{1}{2} \| \vec{r} \times \overrightarrow{\Delta r} \|$

3. Multiplier l'expression de ΔA_1 par m et diviser la par Δt_1. Exprimer le tout en fonction de la norme du moment cinétique $\| \vec{L} \|$.

$$m \frac{\Delta A_1}{\Delta t} = \frac{1}{2} m \| \vec{r} \times \overrightarrow{\Delta v} \| = \frac{1}{2} m \| \vec{L} \|$$

4. En utilisant le fait que $\vec{L}$ reste constant dans le cas d'une force centrale, déduire la 2eme loi de Kepler.

La gravité est une force centrale donc $\frac{\Delta A_1}{\Delta t_1} = \frac{\Delta A_2}{\Delta t_2}$. Donc si $\Delta t_1 = \Delta t_2$ alors $\Delta A_1 = \Delta A_2$.

La 3ème loi

Préambule 1

On rappelle que la force de gravitation entre deux masses M et m séparées par une distance r s'exprime comme $F = \frac{GmM}{r^2}$ où G est la constante gravitationnelle. On rappelle aussi que pour un mouvement circulaire le principe fondamental de la dynamique peut s'écrire $F = ma = m\frac{v^2}{r}$ où a est l'accélération et v la vitesse.

5. On va se placer dans le cas simplifié d'un mouvement circulaire uniforme. En s'appuyant sur le préambule, exprimer v en fonction de G, M et r.

$F = \frac{GmM}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$ ce qui mène à $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$

6. Exprimer la période de révolution T en fonction de r et v et en déduire la 3eme loi de Kepler dans sa version approximée.

$T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ ce qui mène à $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$

****

Données utiles :

G = 6,67.10^{-11} en unité du Système International

M_T = 6.10^{24} kg

R_T = 6400 km

M_L = 7,3.10^{22} kg