Licence 3
2024-2025
Analyse 1

Intégrales généralisées : définitions, calculs

1. **Rappels : primitives usuelles à connaître.** Déterminer les primitives des fonctions f définies par les relations suivantes :

a. $f(t) = \dfrac{1}{t}$;
b. $f(x) = \cos x$;
c. $f(y) = \sin y$;
d. $f(s) = \cos^3 s \ \sin s$;
e. $f(x) = \cos^2 x$;
f. $f(x) = \ln x$;
g. $f(y) = e^y$;
h. $f(a) = \dfrac{1}{\sqrt{a}}$;
i. $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{Z}$;
j. $f(x) = x^y, \quad y \in \mathbb{R}$;
k. $f(y) = x^y, \quad x > 0$;
l. $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$;
m. $f(t) = \dfrac{1}{(t+4)(t-3)}$;
n. $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$.

2. **Rappel : calcul d'intégrales.** Calculer les intégrales suivantes.

a. $I = \displaystyle\int_0^3 (x^2+2)\ dx$;
b. $I_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin t\ dt$;
c. $I = \displaystyle\int_0^{3/2} \cos(\pi t)\ dt$;
d. $I = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x\cos x\ dx$;
e. $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t}{t^2+1}\ dt$;
f. ⋆ ⋆ $I(a) = \displaystyle\int_0^a \frac{t^2}{(t^2+1)^2}\ dt$ (IPP) ;
g. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x\ dx$;
h. $I(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} 2x\ e^{xt}\ dx$;
i. $I = \displaystyle\int_e^{e^2} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$;
j. $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{dy}{y(1+2y)}$;
k. $I = \displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{dx}{1+2e^x}$;
l. ⋆ $I = \displaystyle\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

3. **Intégrales généralisées : intégrale sur $[a, +\infty[$ d'une fonction continue sur $[a, +\infty[$.** Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c\to+\infty} I(c)$.

a. $I(c) = \displaystyle\int_1^c \frac{dt}{t^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

b. $I(c) = \displaystyle\int_1^c e^{-\alpha x} dx$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

c. $I(c) = \displaystyle\int_2^c \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

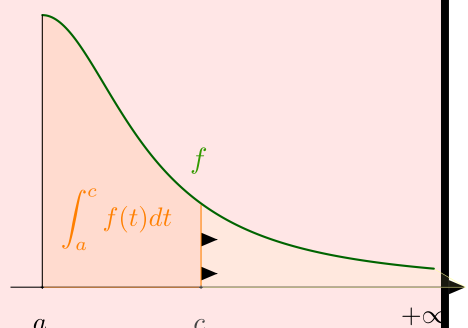
Définition : Intégrale généralisée sur un intervalle $[a, +\infty[$

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, +\infty[$ et soit $I(c) = \int_a^c f(t)\ dt$, pour $c \geq a$.

Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers $+\infty$, on la note : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

4. Exemples

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \quad ? \qquad \int_\pi^{+\infty} \cos t = \quad ? \qquad \int_2^{+\infty} e^{-3x} dx = \quad ?$$

5. Intégrales généralisées : intégrale sur un intervalle $]a, b]$ d'une fonction continue sur $]a, b]$. Dans chacun des trois cas suivants :

- déterminer l'intervalle (ou les intervalles) où la fonction à intégrer est définie et continue ;
- calculer $I(c)$;
- si la limite existe, calculer $\lim_{c \to 0} I(c)$.

(a) $I(c) = \displaystyle\int_c^1 \frac{dt}{t^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$ $\qquad$ (b) $I(c) = \displaystyle\int_c^1 \ln x\ dx$.

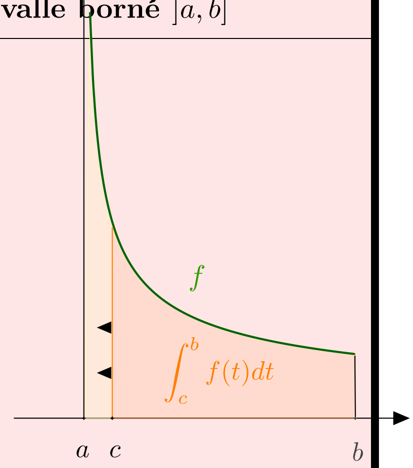
$(c)\star$ $I(c) = \displaystyle\int_c^1 \frac{dx}{x|\ln x|^\alpha}$, avec $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Définition : Intégrale généralisée sur un intervalle borné $]a,b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $]a,b]$ et soit $I(c) = \int_c^b f(t)\ dt$, pour $c \in]a,b]$. Si $I(c)$ admet une limite quand c tend vers a, on la note : $\int_a^b f(t)dt$. Ainsi :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.



Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**. Dans le cas contraire, l'intégrale est dite **divergente**.

Attention : une intégrale généralisée est définie comme une **limite**. Si cette limite n'existe pas, l'intégrale généralisée correspondante n'a pas de sens. Par exemple, l'écriture $\int_0^{+\infty} \cos x\ dx$ n'a aucune signification mathématique.

6. Premiers exemples Les intégrales suivantes sont des intégrales généralisées. Pourquoi ? Quelle est la définition précise de chacune d'entre elles ? Calculer ces intégrales quand c'est possible.

$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \quad ? \qquad \int_0^1 \ln t\ dt = \quad ?$$

7. Mêmes questions que dans l'exercice précédent.

a. $I = \displaystyle\int_0^1 x^2 \ln x\ dx.$;

b. $I(s) = \displaystyle\int_0^1 x^s \ln x\ dx,\ s \in \mathbb{R}$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dy}{y^2+1}$;

d. $\star$ $I(y) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+4y^2x^2}$;

e. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

f. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(2+\sin x)^2}\ dx$;

g. $\star\star$ $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{(1+x)^2}\ dx.$

h. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dy}{y(1+2y)}$;

i. $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x\ e^{-px}\ dx,\ p \in \mathbb{R}$;

j. ⋆ ⋆ $I(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x\ e^{-x}\ dx$

k. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

l. $I = \displaystyle\int_1^{e} \frac{dt}{t\sqrt{\ln t}}$.

À retenir : Intégrales généralisées de référence

- L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- L'intégrale $\int_0^{1} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.
- L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
- L'intégrale $\int_0^{1} \ln t\ dt$ est convergente.

8. ⋆ **Intégrale faussement généralisée**. On considère la fonction f définie par :

$$\forall x > 0 \ \ f(x) = x \ln x.$$

a. Quel est le domaine de définition de la fonction f ?

b. Quelle est la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 ?

c. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

La fonction g est-elle continue en 0 ? L'intégrale $\int_0^1 g(x)\ dx$ est-elle une intégrale généralisée ?

d. Expliquer pourquoi on a :

$$\forall c \in]0,1] \ \ \int_c^1 f(x)\ dx = \int_c^1 g(x)\ dx.$$

e. Expliquer, sans calcul, pourquoi l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$ est convergente et pourquoi on a :

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 g(x)\ dx.$$

f. Donner la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\ dx$.

Proposition 1 : intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a,b]$. Si f admet une limite finie l en a, alors l'intégrale généralisée :

$$\int_a^b f(x)\ dx$$

est convergente.

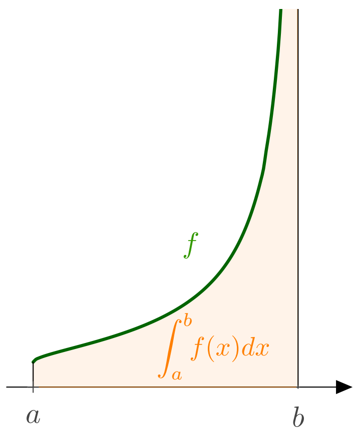
g. ⋆ ⋆ En s'inspirant des questions précédentes, rédiger une démonstration de cette proposition.

9. **a.** La proposition 1 est-elle encore vraie si $b = +\infty$?

b. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\ dx$ est convergente ?

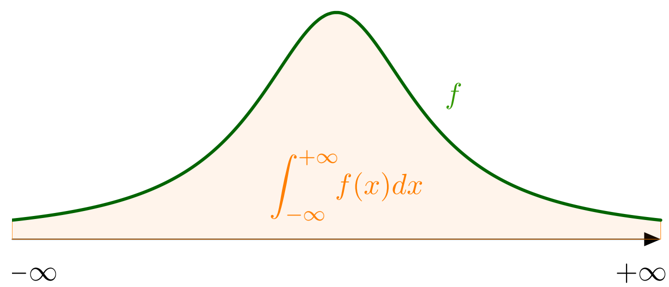
c. ⋆ ⋆ Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?

10. Autres cas : Comment définir l'intégrale généralisée correspondant à chacune des situations suivantes ?



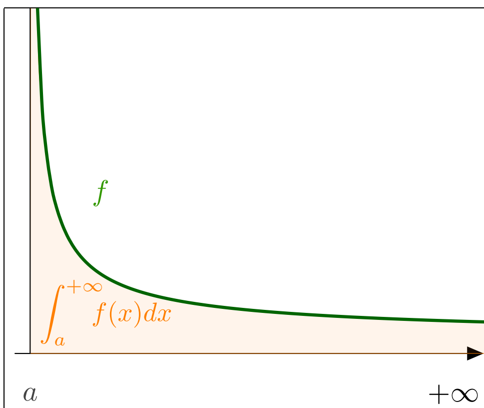
A. f continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x)\ dx =$$



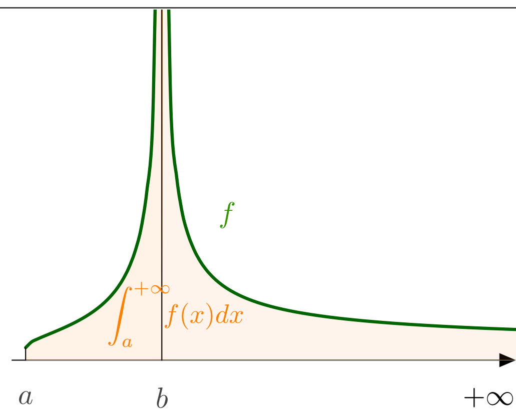
C. f continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx =$$



B. f continue sur $]a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$



D. f continue sur $[a, +\infty[\setminus\{b\}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$

11. Exemples Les intégrales suivantes sont-elles des intégrales généralisées ? Où sont situés leurs problèmes de définition ? Comment les calculer ?

a. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$;

b. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$;

c. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t\sqrt{|\ln t|}}$.

d. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(\ln t)^2}$.

Comment savoir si une intégrale est convergente ?

Dans ce qui suit, on note $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ainsi l'intervalle $]a, b[$ peut représenter un intervalle borné ou non borné.

A. En calculant sa valeur *On a procédé comme cela dans le paragraphe précédent.* C'est ainsi que l'on détermine la nature des intégrales de référence :

Intégrales de référence

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est :

- convergente si $\alpha < 1$
- divergente sinon.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est :

- convergente si $\alpha > 1$
- divergente sinon.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}\, dt$ est :

- convergente si $a > 0$
- divergente sinon.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln x\, dx$ est convergente.

Attention. Il faut savoir refaire rapidement le calcul de ces intégrales.

Somme de deux intégrales convergentes

Si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\, dt$ sont convergentes, alors il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(t)+g(t))\, dt$ et l'on a :

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\, dt = \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b g(t)\, dt.$$

B. Fonctions à valeurs positives ou nulles : comparaison avec les fonctions de référence

L'intégrale généralisée d'une fonction à valeurs positives est toujours définie

Si la fonction f est définie et continue sur $]a,b[$ et si, pour tout $x \in]a,b[$, $f(x) \geq 0$, alors l'intégrale $\int_a^b f(x)\ dx$ est toujours définie. Sa valeur est soit un réel positif ou nul (dans ce cas, l'intégrale est convergente), soit $+\infty$ (dans ce cas, l'intégrale est divergente).

Comparaison d'intégrales de fonctions à valeurs positives

1. Si pour tout $x \in]a,b[$, $\mathbf{f(x) \geq g(x) \geq 0}$, alors

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$

   En particulier si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ converge, il en est de même de $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$.

2. Si f et g sont continues et à valeurs positives sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}[$ et si $\mathbf{f(x)} \underset{\mathbf{x \to b^-}}{\sim} \mathbf{g(x)}$, alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (c'est à dire que si l'une converge, alors l'autre aussi).

3. Si f et g sont continues et à valeurs positives sur $]\mathbf{a},\mathbf{b}]$ et si $\mathbf{f(x)} \underset{\mathbf{x \to a^+}}{\sim} \mathbf{g(x)}$, alors les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ et $\displaystyle\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (c'est à dire que si l'une converge, alors l'autre aussi).

C. Fonctions à valeurs de signes quelconques

Convergence absolue

Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge également. On dit dans ce cas que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente. On dit aussi que la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]a,b[$.

Attention ! La réciproque de cette propriété est fausse : par exemple, l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\ dt$$

est convergente mais elle n'est pas absolument convergente. On dit parfois qu'elle est semi-convergente.

Intégrales généralisées : étude de la convergence

1. *Intégrales de fonctions à valeurs de signe constant.* Étudier la convergence des intégrales suivantes. On ne demande pas d'en calculer la valeur.

Série 1

a. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}.$

b. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{\sin t}$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$;

d. $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dt}{t}$;

e. $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{1}{t}\right)}{t^2}\, dt$;

Série 2

a. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-\cos t}}$;

b. $I = \displaystyle\int_0^{1} \frac{1-e^{-t}}{t\sqrt{t}}\, dt$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin x)\, dx$;

d. $I = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t-10}+t}$;

e. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}+5x^2}.$

2. Quelle est la nature de l'intégrale suivante ?

$$I = \int_0^1 \frac{\sin t}{t} dt.$$

Proposition : Intégrale faussement généralisée

Soient a et b deux réels et f une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$. Si f admet une limite finie l en a, alors l'intégrale généralisée

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

est convergente.

3. **a.** La proposition est-elle encore vraie si $b = +\infty$?

b. Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. On suppose que $f(x)$ tend vers une limite finie l en $+\infty$. Peut-on en déduire que l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ est convergente ?

c. ⋆⋆ Soit f une fonction continue sur $[1, +\infty[$. Si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente, peut-on en déduire que $f(x)$ tend vers 0 à l'infini ?

4. *Convergence absolue.* Étudier la convergence des intégrales suivantes.

a. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{6/5} dx$;

b. $I = \displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}} x^{-k}\, dx$;

c. $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha(1+t^2)}\, dt$, avec $\alpha > -1$.

5. *Étude de la convergence de l'intégrale :*

$$I = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$$

a. Soit $c > 1$. Démontrer que :

$$\int_\pi^c \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\cos c}{c} - \frac{1}{\pi} - \int_\pi^c \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

b. Déterminer la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_\pi^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt$.

c. En déduire la nature de l'intégrale I.

d. Soit $\alpha > 0$. En procédant de la même manière, étudier la convergence de l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_\pi^{+\infty} \frac{\sin t}{t^\alpha} dt.$$

e. En procédant de la même manière, étudier la convergence de l'intégrale :

$$J = \int_2^{+\infty} \frac{\cos 2t}{t(\ln t)^\alpha}\, dt.$$

6. *Free style.* Étudier la convergence des intégrales suivantes.

Série 1

a. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt.$

b. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t(t^3 + 2\sin t)}$;

c. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x^2)}{\ln x + x^2} dt$;

d. $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{s} + 1}{s^2 + \sqrt{s}} ds$;

e. $I = \int_0^{2} \frac{dx}{x + 5\sqrt{x}}$;

f. $I = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2 + 2}}$;

g. $I = \int_0^{1} \frac{u\sqrt{u}}{e^{u^2} - 1}\, du$;

h. $I = \int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t - 1} dt.$

Série 2

a. $I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2 + s^2} dt$;

b. $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{x} dx$;

c. $I(t) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{3 + \cos x} dx$;

d. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-2x}}{2 - \sin x} dx$;

e. $I(s) = \int_1^{+\infty} \frac{\sin st}{t(3 + \sqrt{t})} dt$;

f. $I = \int_0^{+\infty} \ln(x) e^{-x} dx$;

g. $I = \int_0^{1} \frac{\ln(t)}{t - 1} dt.$