Licence 3
UE 5.I5
Maths

Ce qu'il faut savoir sur les intégrales impropres

1. Définitions

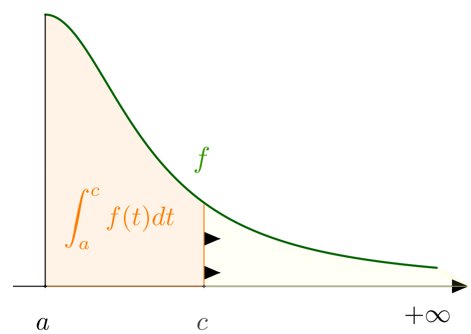
Les cas les plus fréquemment rencontrés d'intégrales impropres sont les deux suivants :

Cas 1 : *Intégrale sur* $[a, +\infty[$ *d'une fonction* f *continue sur* $[a, +\infty[$. Cette intégrale est définie par :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{c \to +\infty} \int_a^c f(t)dt.$$

Attention : cette limite n'existe pas toujours.

Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**.



Exemples

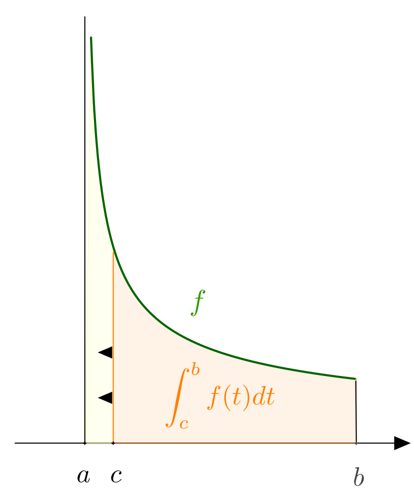
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \quad ? \qquad \int_1^{+\infty} \cos t = \quad ?$$

Cas 2 : *Intégrale sur* $[a, b]$ *d'une fonction* f *continue sur* $]a, b]$. Cette intégrale est définie par :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{c \to a^+} \int_c^b f(t)dt.$$

Mais attention : cette limite n'existe pas toujours.

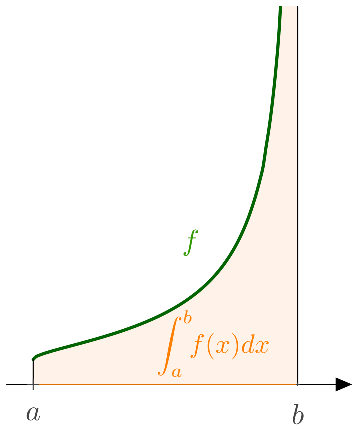
Quand cette limite **existe et est finie**, on dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente**.



Exemples

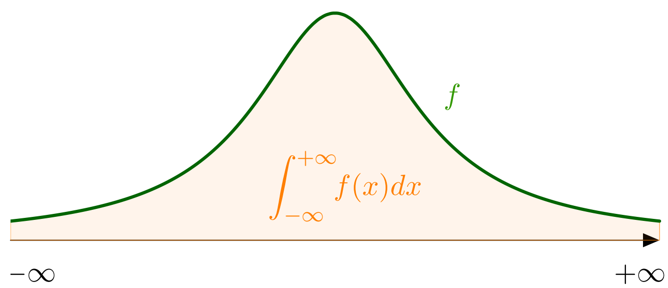
$$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \quad ? \qquad \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1-t} = \quad ?$$

Autres cas : Comment définir l'intégrale généralisée correspondant à chacune des situations suivantes ?



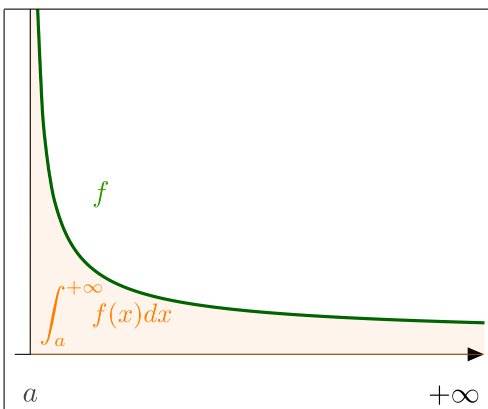
f continue sur $[a, b[$

$$\int_a^b f(x)\ dx =$$



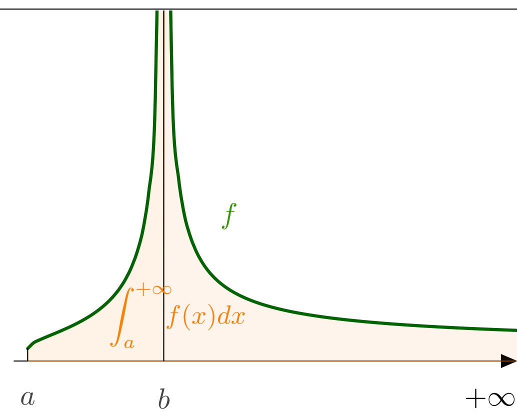
f continue sur $\mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ dx =$$



f continue sur $]a, +\infty[$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$



f continue sur $[a, +\infty[\backslash\{b\}$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx =$$

Exemples Les intégrales suivantes sont-elles des intégrales généralisées ? Où sont situés leurs problèmes de définition ? Comment les calculer ?

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}} \qquad \int_{1/2}^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{|x-1|}}.$$

2. Comment savoir si une intégrale est convergente ?

Dans ce qui suit, on note $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, ainsi l'intervalle $]a, b[$ peut représenter un intervalle borné ou non borné.

A. En calculant sa valeur C'est ainsi que l'on détermine la nature des intégrales de référence.

Intégrales de référence

1. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est :

- convergente si $\alpha < 1$
- divergente sinon.

2. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est :

- convergente si $\alpha > 1$
- divergente sinon.

3. L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-at}\ dt$ est :

- convergente si $a > 0$
- divergente sinon.

4. L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\ dt$ est convergente.

Exercice. Calculer la valeur de ces intégrales.

Somme de deux intégrales convergentes

Si les deux intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\ dt$ sont convergentes, alors il en est de même de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b (f(t) + g(t))\ dt$ et l'on a :

$$\int_a^b (f(t) + g(t))\ dt = \int_a^b f(t)\ dt + \int_a^b g(t)\ dt.$$

B. Fonctions à valeurs positives ou nulles : comparaison avec les fonctions de référence

Comparaison d'intégrales de fonctions à valeurs positives

1. Si pour tout $x \in]a,b[$, $\mathbf{f(x) \geq g(x) \geq 0}$, alors
$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \geq 0.$$
En particulier si $\int_a^b f(x)dx$ converge, il en est de même de $\int_a^b g(x)dx$.
2. Si f et g sont continues et à valeurs positives sur $[\mathbf{a},\mathbf{b}[$ et si $\mathbf{f(x)} \underset{\mathbf{x \to b^-}}{\sim} \mathbf{g(x)}$, alors les deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (c'est à dire que si l'une converge, alors l'autre aussi).
3. Si f et g sont continues et à valeurs positives sur $]\mathbf{a},\mathbf{b}]$ et si $\mathbf{f(x)} \underset{\mathbf{x \to a^+}}{\sim} \mathbf{g(x)}$, alors les deux intégrales $\int_a^b f(x)dx$ et $\int_a^b g(x)dx$ sont de même nature (c'est à dire que si l'une converge, alors l'autre aussi).

C. Fonctions à valeurs de signes quelconques

Convergence absolue

Si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ converge, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge également. On dit dans ce cas que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ est absolument convergente. On dit aussi que la fonction f est intégrable sur l'intervalle $]a,b[$.

Attention ! La réciproque de cette propriété est fausse : par exemple, l'intégrale :
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$
est convergente mais elle n'est pas absolument convergente. On dit parfois qu'elle est semi-convergente.