Évaluation du jeudi 5 octobre 2023 (extraits)

Exercice 1 (). *Questions de cours*

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0;1)$. F_X désignant la fonction de répartition de X, exprimer les calculs suivants par l'utilisation de F_X :
   (a) $\mathbb{P}(X \leq 1,63)$
   (b) $\mathbb{P}(X \geq 0,53)$
   (c) $\mathbb{P}(X \leq -1,14)$
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Expliquer comment obtenir les deux nombres suivants à l'aide des quantiles de X :
   (a) le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(X \leq u) \geq 90\%$.
   (b) le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(-u \leq X \leq u) \geq 87\%$.
3. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(178;4)$. Exprimer $\mathbb{P}(X \geq 180)$ à l'aide de la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{N}(0,1)$
4. Soit $X \sim \mathcal{N}(1;4)$ et $Y \sim \mathcal{N}(1;2)$ indépendantes.
   (a) Quelle est la loi de $-Y$?
   (b) Quelle est la loi de $X - Y$?

Correction

1. $\mathbb{P}(X \leq 1,63) = F_X(1,63)$
2. $\mathbb{P}(X \geq 0,53) = 1 - \mathbb{P}(X < 0,53) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0,53) = 1 - F_X(0,63)$
3. $\mathbb{P}(X \leq -1,14) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1,14) = 1 - F_X(1,14)$
4. *u est alors exactement le quantile d'ordre* 0.9 *de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.
5. *Le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(-u \leq X \leq u) \geq 87\%$ est aussi, par symétrie de la densité, le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(X \leq u) \geq 93,5\%$. C'est donc le quantile d'ordre* 0.935 *de la loi* $\mathcal{N}(0,1)$.

On a, en centrant et réduisant X :

$$\mathbb{P}(X \geq 180) = \mathbb{P}(\frac{X-178}{2} \geq 1) = 1 - \mathbb{P}(\frac{X-178}{2} \leq 1)$$

Or $\frac{X-178}{2}$ suit une loi $\mathcal{N}(0,1)$ donc

$$\mathbb{P}(X \geq 180) = 1 - 0,8413 = 1587$$

1. *La loi de $-Y$ est $\mathcal{N}(-1;2)$ car $E[-Y] = -E[Y]$ et $Var(-Y) = Var(Y)$*
2. *Une somme de lois normales indépendantes est une loi normale, et par indépendance les variances s'additionnent également, donc $X - Y$ suit la loi $\mathcal{N}(2;6)$.*

Exercice 2 ().
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. On notera dans la suite X une variable aléatoire admettant cette densité.
2. Justifier que la fonction de répartition de X est :

$$F_X(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité.
5. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité.

Correction

1. *La fonction f est positive et intégrable. Elle est donc la densité de probabilité d'une variable aléatoire X si $\lim_{x\to-\infty} \int_x^0 f(t)dt = 1$. Mais*

$$\int_x^0 e^t dt = \left[e^t\right]_x^0 = 1 - e^x \to 1$$

lorsque $x \to -\infty$.

2. *X est à valeurs dans $]-\infty, 0]$, donc $F_X(t) = 1$ si $t \geq 0$. Pour $t < 0$, on a*

$$F_X(t) = \int_{-\infty}^t e^x dx = e^t.$$

3. *On calcule cette espérance par une intégration par parties. En effet,*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^0 xe^x dx \\ &= [xe^x]_{-\infty}^0 - \int_{-\infty}^0 e^x dx \\ &= -1. \end{aligned}$$

4. *Soit $t \in \mathbb{R}$. On a $Y \leq t \iff 2X + 1 \leq t \iff X \leq (t-1)/2$. Ainsi, $F_Y(t) = F_X\big((t-1)/2\big) = e^{(t-1)/2}$ si $t \leq 1$, et $F_Y(t) = 1$ si $t < 1$.*
La fonction de répartition F_Y est dérivable sauf en 1. On en déduit que Y admet une densité donnée, pour $t \neq 1$, par $f(t) = F_Y'(t)$. Ainsi, pour $t < 1$, on a $f(t) = \frac{1}{2}e^{(t-1)/2}$ et pour $t \geq 1$, $f(t) = 0$.

5. *On reproduit la même démarche. On a*

$$Y \leq t \iff X^2 \leq t.$$

Ainsi, si $t < 0$, on a $F_Y(t) = 0$. Si $t \geq 0$, on a

$$Y \leq t \iff -\sqrt{t} \leq X \leq \sqrt{t} \iff -\sqrt{t} \leq X \leq 0$$

puisque X est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$. On en déduit que

$$F_Y(t) = P(-\sqrt{t} \leq X \leq 0) = 1 - P(X < -\sqrt{t}) = 1 - F_X(\sqrt{t}) = 1 - e^{-\sqrt{t}}.$$

On détermine la densité de Y en dérivant cette fonction de répartition. Ainsi, Y admet pour densité $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ si $t \geq 0$, $f(t) = 0$ sinon.

Exercice 3 ().

Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue.
On suppose que X admet une espérance.
On note F la fonction de répartition de X. À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, démontrer que

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x$$