Évaluation du jeudi 5 octobre 2023 (extraits)

Exercice 1 (). *Questions de cours*

1. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0;1)$. F_X désignant la fonction de répartition de X, exprimer les calculs suivants par l'utilisation de F_X :
   (a) $\mathbb{P}(X \leq 1,63)$
   (b) $\mathbb{P}(X \geq 0,53)$
   (c) $\mathbb{P}(X \leq -1,14)$
2. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0;1)$. Expliquer comment obtenir les deux nombres suivants à l'aide des quantiles de X :
   (a) le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(X \leq u) \geq 90\%$.
   (b) le plus petit réel u tel que $\mathbb{P}(-u \leq X \leq u) \geq 87\%$.
3. Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(178;4)$. Exprimer $\mathbb{P}(X \geq 180)$ à l'aide de la fonction de répartition F de la loi $\mathcal{N}(0,1)$
4. Soit $X \sim \mathcal{N}(1;4)$ et $Y \sim \mathcal{N}(1;2)$ indépendantes.
   (a) Quelle est la loi de $-Y$?
   (b) Quelle est la loi de $X - Y$?

Exercice 2 ().
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est une densité de probabilité. On notera dans la suite X une variable aléatoire admettant cette densité.
2. Justifier que la fonction de répartition de X est :

$$F_X(t) = \begin{cases} e^t & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

3. Montrer que X admet une espérance et la calculer.
4. On pose $Y = 2X + 1$. Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité.
5. On pose $Y = X^2$. Déterminer la fonction de répartition de Y ainsi que sa densité.

Exercice 3 ().
Soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue.
On suppose que X admet une espérance.
On note F la fonction de répartition de X. À l'aide d'une intégration par parties bien choisie, démontrer que

$$E[X] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > x)\,\mathrm{d}x$$