Ce qu'il faut savoir sur les séries numériques

1. Définitions

Une série, c'est une suite (S_n) que l'on définit d'une manière particulière. On ne donne pas le terme général S_n, on donne juste une manière de le calculer à partir de la donnée d'une autre suite (u_n).

Sommes partielles, somme d'une série

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels ou complexes. Par définition, **la série de terme général** u_n**, c'est la suite** (S_n) définie par:

$$\begin{array}{rcl} S_0 & = & u_0, \\ S_1 & = & u_0 + u_1, \\ S_2 & = & u_0 + u_1 + u_2, \\ \vdots & & \vdots \\ S_n & = & u_0 + u_1 + \ldots + u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k, \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Les nombres S_n sont appelés **sommes partielles** de la série $\sum u_n$.

Somme d'une série

La **somme de la série** $\sum u_n$, c'est la limite de la suite (S_n), quand elle existe, finie ou infinie. On la note :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

Exemples :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} 1 = ? \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = ? \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n = ?$$

Série convergente, reste d'une série convergente

Quand la somme de la série $\sum u_n$ **existe et est finie**, on dit que **la série** $\sum u_n$ **est convergente**. Dans ce cas, la différence entre S_n et cette limite est appelée **reste** de rang n de la série :

$$R_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Ainsi, R_n tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Une série qui n'est pas convergente est dite **divergente**.

Exemple : Séries géométriques Soit $x \in \mathbb{C}$. On sait que si $x \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Donc, si $|x| < 1$, la série converge et sa somme est $\frac{1}{1-x}$. Sinon, que se passe-t-il ?

Convergence de la série $\sum u_n$ vs convergence de la suite (u_n)

Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) tend vers 0.

En effet, $u_n = S_n - S_{n-1} \to 0$.

Si la suite (u_n) tend vers 0, alors on ne peut rien dire a priori de la série $\sum u_k$: elle peut converger ou diverger.

Exemple 1 : Si $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$, on a $u_n \to 0$ mais la série $\sum u_k$ diverge. Pourquoi ?

Exemple 2 : Si $u_n = (1/3)^n$, la suite (u_n) tend vers 0 et la série $\sum u_n$ converge.

2. Comment savoir si une série est convergente ?

A. Cas des séries à termes positifs ou nuls Quand tous les termes u_n sont positifs ou nuls, la suite des sommes partielles (S_n) est croissante :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0.$$

Et nous savons qu'une suite croissante a toujours une limite, finie ou infinie. Si elle est majorée, sa limite est finie ; si elle n'est pas majorée, sa limite est infinie.

Somme d'une série à termes positifs ou nuls

Si tous les termes u_n sont positifs ou nuls, alors la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ existe toujours. Cette somme est soit finie, soit infinie.

Exemples de séries à termes positifs ou nuls à connaître

- Séries géométriques : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n \quad \begin{cases} \text{converge si } r \in [0,1[\\ \text{diverge si } r \geq 1 \end{cases}.$
- Séries de Riemann : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \quad \begin{cases} \text{converge si } \alpha > 1 \\ \text{diverge si } \alpha \leq 1 \end{cases}.$

Les propriétés suivantes permettent de ramener l'étude d'une série à celle d'une série déjà connue, par exemple une série géométrique ou de Riemann.

Comparaison de séries à termes positifs ou nuls

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbf{0 \leq v_n \leq u_n}$, alors :

$$0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Ainsi, si la série est convergente, alors la série l'est aussi. Réciproquement, si la série est divergente, alors la série l'est aussi.

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\mathbf{u_n, v_n \geq 0}$, et si $\mathbf{u_n \sim v_n}$ pour $n \to \infty$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature : si l'une converge, alors l'autre aussi.

Règle de D'Alembert

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{u_n > 0}$ et que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l \in \mathbb{R}_+.$$

1. Si $l < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $l > 1$, la série $\sum u_n$ est divergente.
3. Si $l = 1$, on ne peut a priori rien dire sur la nature de la série $\sum u_n$.

B. Cas général Quand les termes d'une série $\sum u_n$ ne sont pas tous positifs, on ne peut pas appliquer les résultats précédents.

Une première idée consiste à étudier la série $\sum |u_n|$. Cette série est à termes positifs, donc on peut utiliser les résultats qui précèdent. Et la propriété suivante permet de faire le lien entre les séries $\sum |u_n|$ et $\sum u_n$:

Séries absolument convergentes

Si la série $\sum |u_n|$ est convergente, alors la série $\sum u_n$ est convergente.

Quand la série $\sum |u_n|$ est convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**. Ainsi :

Toute série absolument convergente est convergente.

Une série qui converge mais qui n'est pas absolument convergente est parfois appelée **semi-convergente**.

Pour étudier la convergence d'une série qui n'est pas absolument convergente, il n'y a pas de méthode générale.

On rencontre souvent la situation suivante :

Séries alternées

Si la suite (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang et si $u_n \to 0$, alors la série $\sum (-1)^k u_k$ est convergente..

Exemple La série harmonique alternée $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente puisque la suite (u_n) avec $u_n = 1/n$ est décroissante et tend vers 0. Mais elle n'est pas absolument convergente (série de Riemann avec $\alpha = 1$)). Elle est donc semi-convergente.