Licence 3
Analyse 1
2023-2024

Exercices : Séries. Corrigés

1.

$$S_N = \frac{1}{4}(5^{N+1} - 1); \qquad R_n = N + 1;$$

$$Q_N = 1 \text{ si } n \text{ est pair, } 0 \text{ si } n \text{ est impair}; \qquad T_N = \frac{1}{(N+1)^2} - 1;$$

$$U_n = \frac{7}{2} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2 \cdot 3^n}; \qquad V_n = 1 - \frac{1}{n+1};$$

$$W_N = \sqrt{N+1} - 1;$$

Si x n'est pas multiple de π :

$$X_n(x) = \frac{\cos\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin(n+1)x}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Si $x = 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $X_n(x) = n + 1$.

Si $x = (2k+1)\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$: $X_n(x) = Q_n$.

2.

$$\lim_{n \to +\infty} S_N = +\infty \qquad \lim_{n \to +\infty} R_N = +\infty.$$

$$(Q_n) \text{ n'a pas de limite} \qquad \lim_{n \to +\infty} T_N = -1.$$

$$\lim_{n \to +\infty} U_n = 5 \qquad \lim_{n \to +\infty} V_n = 1.$$

$$\lim_{n \to +\infty} W_n = +\infty$$

Si $x = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\lim_{n \to +\infty} X_n(x) = +\infty$. Dans les autres cas, $(X_n(x))$ n'a pas de limite.

3. C'est du cours.

4.

$$S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$

Or, si $n + 1 \leq k \leq 2n$, on a :

$$\frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}.$$

Et donc :

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Raisonnons par l'absurde : si la série était convergente, la suite des sommes partielles (S_n) serait convergente, on aurait par exemple :

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = s.$$

Mais on aurait aussi $S_{2n} \to s$ (si une suite (u_n) converge vers la limite l, alors la suite extraite (x_{2n}) a aussi pour limite l) et donc $S_{2n} - S_n \to s - s = 0$. Mais comme $S_{2n} - S_n \geq 1/2$, c'est impossible.

5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$: on l'a vu au premier exercice (suite (V_n)). La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente. Comme

$$\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2},$$

on peut bien en déduire, par comparaison de séries à termes positifs, que la série $\sum_{n\geq 1}(1/n^2)$ est convergente.

6.

(a) CV (majoration par $1/5n^2$)

(b) DV (minoration par $1/n$);

(c) DV grossière (minoration par $\sqrt{n}/3$);

(d) DV (minoration par $1/n$);

(e) CV (majoration par $1/n^{3/2}$);

(f) CV (majoration par $1/n^2$ pour $n \geq 3$);

(g) CV (croiss. comp. : $\ln n/n \leq 1$; pour $n \geq 3$)

(h) CV (majoration par n^2/n^n puis par n^2/n^4 pour $n \geq 4$;

(i) CV (maj. par $n^{k-1}/n^{2k} = 1/n^{k+1}$).

7. (a) La série converge. Pour n assez grand,

$$e^{\sqrt{n}\ln n - n} \leq e^{-n/2}.$$

(b) La série converge. Pour n assez grand, $\ln n \leq n^{1/4}$. (Pas facile.)

(c) La série diverge. Pour n assez grand, $1/\ln n \geq 1/n^{1/4}$.

(j) La série converge. (Pas facile.) Puisque $\ln(\ln n)$ tend vers l'infini, alors $\ln(\ln n) \geq 2$ pour n assez grand, et donc :

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln(\ln n)\cdot \ln n}} \leq \frac{1}{e^{2\ln n}} = \frac{1}{n^2}.$$

8. *Abbréviation : t.g. = terme général.*

(a) DV : t.g. équivalent à $1/n$;

(b) DV : t.g. équivalent à $1/n$;

(c) CV : t.g. équivalent à $1/n^2$;

(d) t.g. équivalent à $1/2^p n^{p/2}$; CV si $p > 2$;

(e) CV : t.g. équivalent à $\sqrt{n}/n^2 = 1/n^{3/2}$;

(f) CV : t.g. équivalent à $\pi(2/3)^n$;

(g) CV : t.g. équivalent à $\sqrt{n}/3n^2 = 1/3n^{3/2}$;

(f) CV : t.g. équivalent à $(2/3)^n$.

9. (a) Posons : $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4}.$$

La série CV car $1/4 < 1$.

(b) Posons : $u_n = \dfrac{2^n n!}{n^n}$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 2\frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

On sait (exercice classique) que $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e^1 = e$. Donc

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \frac{2}{e} < 1.$$

Donc la série converge.

(c) Posons : $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}x^n$. On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{x}{4}.$$

La série CV si $x > 4$ et ne converge pas si $x < 4$. Si $x = 4$, le critère de D'Alembert ne permet pas de conclure.

10. Notons u_n le terme général de la série considérée.

(a) $|u_n| \leq 1/(n^4+n)$. La série $\sum \frac{1}{n^4+n}$ CV par comparaison par équivalents avec $\sum 1/n^4$. Donc la série $\sum |u_n|$ est convergente par comparaison. Donc $\sum u_n$ est CV. Le même raisonnement s'applique dans les autres cas, je ne le répète pas.

(b) $|u_n| \leq \dfrac{n^2+1}{2^n - 2\ln n} \sim \dfrac{n^2}{2^n}$. On utilise ensuite le critère de D'Alembert. La série est ACV donc CV.

(c) $|u_n| \leq 1/(n^4 - |\sin n|) \sim 1/n^4$. La série est ACV donc CV.

(d) Critère de D'Alembert : $|u_{n+1}|/|u_n|$ tend vers 0 donc la série est ACV donc CV. La cas $x = 0$ doit être traité à part, mais il est évident.

(e) On utilise le critère de D'Alembert pour étudier la série $\sum |u_n|$. On trouve que la série CVA si $|x| < 1$. Ensuite, si $x \geq 1$ ou $x \leq -1$, u_n ne tend pas vers 0 donc la série $\sum u_n$ diverge.

(f) Facile. CVA.

(g) Facile. $|u_n| \sim \frac{1}{n^2}$. Donc la série $\sum u_n$ CVA donc CV.

(h) $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2 + \ln n} \sim \dfrac{1}{n^2}$ (croissances comparées). Donc la série CVA donc CV.

11. (a) Si $p > 0$, la suite $(1/n^p)$ est décroissante et tend vers 0. On a donc une série alternée, elle converge.

Si $p \leq 0$, le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge (grossièrement).

(b) Série alternée, CV.

(c) Le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge (grossièrement).

(d) $\cos n\pi = (-1)^n$. Série alternée, CV.

(e) On peut commencer à étudier la convergence absolue en utilisant le critère de D'Alembert. On trouve que la série CVA si $|x| < 1$. Si $|x| > 1$, il y a convergence grossière de la série $\sum u_n$. Pour $x = 1$, comme $1/(n+1) \sim 1/n$, la série diverge. Enfin, pour $x = -1$, la série est une série alternée, donc converge.

(f) Pas facile. Pour étudier la monotonie de la suite (u_n), où :

$$u_n = \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}},$$

on calcule le quotient u_{n+1}/u_n :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \cdots = \frac{n^2+4n+3}{n^2+4n+4} \sqrt{\frac{n}{n+1}}.$$

Le premier quotient et la racine carrée sont chacuns visiblement inférieurs ou égaux à 1, donc la suite (u_n) est décroissante. La série $\sum u_n$ est donc alternée et converge.

12. (a) (Difficile). On remarque que :

$$\sqrt{n^2+1} - n = \frac{(n^2+1) - n^2}{\sqrt{n^2+1}+n} = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Donc :

$$\pi\sqrt{n^2+1} = \pi n + \frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}.$$

Or, pour tout réel α, on a :

$$\sin(n\pi + \alpha) = (-1)^n \sin\alpha.$$

Donc :

$$\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right) = (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right).$$

La suite $(\sqrt{n^2+1}+n)$ est visiblement croissante et tend vers l'infini, donc la suite $\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right)$ est une suite déroissante qui tend vers 0. Comme tous ses termes sont dans l'intervalle $[0,\pi/2]$ et que la fonction sinus est croissante dans cet intervalle, la suite $(\sin\left(\frac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}\right))$ est décroissante et, de plus, tend vers 0 (continuité de la fonction sinus en 0). On est donc face à une série alternée, qui converge.

(b) Si n est pair, $\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)=0$. Donc la série à étudier peur s'écrire

$$\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2k+1}\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)=\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^k}{2k+1}.$$

Série alternée, CV.

(c). Suivre les indications, mais difficile.

(d) Décomposer :

$$\frac{1+(-1)^n n}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{(-1)^n}{n}.$$

Somme d'une série de Riemann convergente et d'une série alternée. La série CV.

13. Difficile.

(a) On utilise le DL en 0 suivant :

$$\frac{1}{1+x}=1-x+O(x^2),$$

en se rappelant que la notation $O(x^2)$ représente une fonction telle que :

$$\left|O(x^2)\right|\leq Ax^2,$$

avec une certaine constante A dont la valeur n'est pas importante.

On écrit donc :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\frac{1}{1+(-1)^n/\sqrt{n}}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1-\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+O(\frac{1}{n})\right).$$

Puis on développe :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}O(\frac{1}{n}).$$

La série de terme général $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est une série alternée, donc convergente.

La série de terme général $v_n=\dfrac{1}{n}$ est une série de Riemann divergente.

Qu'en est-il de la série de terme général $w_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}O(\dfrac{1}{n})$? Étudions sa convergence absolue :

$$|w_n|\leq\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{A}{n}=\frac{A}{n^{3/2}}.$$

On reconnaît une série de Riemann convergente, donc la série $\sum w_n$ est CVA, donc CV.

La série de l'énoncé se décompose donc en une somme de deux suites convergentes et d'une suite divergente, donc elle diverge.

(b) Puisque le cosinus est compris entre 0 et 1, le signe de $\ln(\cos(1/n))$ est toujours négatif. On peut donc raisonner par équivalents (série à termes de signe constant).

On utilise le DL en 0 de la fonction cosinus à l'ordre 2 :

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Et l'on sait que $\ln(1+u) \sim u$ quand u tend vers 0. Donc :

$$\ln(\cos x) \sim -\frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{2}$$

quand x tend vers 0. Donc :

$$\ln(\cos \frac{1}{n}) \sim -\frac{1}{n^2}.$$

Le terme général de notre série est donc équivalent à celui d'une série de Riemann convergente. Donc, par comparaison de séries à termes de signe constant, la série CV.

14. (a) Signe constant et $u_n \sim 1/n$. DV.

(b) Voir exercice précédent.

(c) Signe constant, équivalent. CV.

(d à droite) Série alternée, CV.

(d à gauche) Signe constant, majoration, D'Alembert. CV.

(e) Pas facile. Termes positifs, on peut raisonner par équivalents.

On factorise par $(2n/3n)^{n/2}$. Il reste à étudier :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n/2}}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n/2}}.$$

En passant à l'exponentielle au numérateur et au dénominateur, on peut calculer la limite de cette expression :

$$\frac{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n/2}}{\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{n/2}} \to \frac{e^{1/4}}{e^{1/6}} = e^{1/12}.$$

Et donc :

$$\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2} \sim e^{1/12}\left(\frac{2}{3}\right)^{n/2} = e^{1/12}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^{n}.$$

Série géométrique de raison $\sqrt{2/3} < 1$, convergente. Par comparaison d'équivalents, notre série est CV.

(f) Pas facile. On étudie la CVA par le critère de D'Alembert. On trouve :

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \ldots = |x| \left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \right)^{n+1} \to |x|e.$$

Il y a donc CVA si $|x| < 1/e$. Si $|x| \geq 1/e$, on laisse tomber.

(g) Signe constant pour n assez grand (pourquoi ?). Équivalents. Série de Riemann avec $\alpha = 2$, CV.

(h) Comme pour (g), mais cette fois la série DV.

(i) Comme pour (g).

15. (a) Divergence grossière.

(b) D'Alembert. CV.

(c) Série alternée, CV.

(d à gauche) Idem.

(d à droite) Convergence absolue. Majoration. Équivalent. Série de Riemann avec $\alpha = 2$. CVA donc CV.

(e) Signe constant (pourquoi ?). Équivalent : $-\sqrt{n} \cdot \frac{1}{2n^2}$. Riemann avec $\alpha = 3/2$. CV.

(f) Divergence grossière.

(g) Signe constant, minoration par $1/\sqrt{n}$ pour $n \geq 2$, DV.

(h) Signe constant, équivalent, Riemann avec $\alpha = 2$, CV.

(i) Signe constant, minoration par $1/\ln n$ puis par $1/n$, DV.

(j) DV grossière.

(k) Série alternée, CV.

(l) DV grossière.

(m) Signe constant, équivalent, utiliser que $\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}\ln x$. Donc

$$u_n = \frac{1}{2}\ln(1+\frac{1}{n}).$$

Donc $u_n \sim 2/n$, DV.

(n) Série télescopique, on calcule les sommes partielles et on passe à la limite :

$$S_N = \sin(1/(N+1)) - \sin 1 \to -\sin 1.$$

La limite de S_N existe et est finie, donc la série CV.

(o) voir (m).

(p) Signe constant. D'Alembert : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to \dfrac{1}{e}$, donc CV.

(q) Décomposer en une somme de deux séries. La première converge (Riemann avec $\alpha = 3/2$ et la seconde aussi (série alternée). Donc la somme des deux converge.

(r) Signe constant pour n assez grand. Majorer le numérateur par $\sqrt{n}$ pour n assez grand (croissances comparées). Puis équivalent. Riemann avec $\alpha = 3/2$. CV.

(s) Signe constant. Minorer $\ln n$ par $\sqrt{n}$ pour n assez grand (croissances comparées). DV

(t) Signe constant. Majorer par $1/n^2$. CV.

(u) DV grossière.

(v) Nul si n impair. Donc la série peut s'écrire aussi :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k}} \cos(k\pi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2k}} (-1)^k.$$

Série alternée, donc convergente.

(w) Signe constant, équivalent. Exercice 8, question (e).

(x) C'est pratiquement la même chose que dans l'exercice 13, question (a) : Faire un DL.

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + O(\frac{1}{(\sqrt{n})^2})\right)$$

On développe :

$$\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n\sqrt{n}} = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{n^{3/2}} + \frac{(-1)^n}{n} O(\frac{1}{n}).$$

Notre série s'écrit donc comme une somme de trois séries. La première est une série alternée, donc CV ; la seconde est une série de Riemann avec $\alpha = 3/2$, donc CV et la troisième est absolument convergente et donc CV, puisque :

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} O(\frac{1}{n})\right| \leq \frac{A}{n^2}.$$

La somme de trois séries convergentes est convergente, donc notre série converge.

(y) Même méthode que pour (x), mais attention. Si on utilise le même DL de $1/(1+x)$, à l'ordre 2, on obtient :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^{1/4}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{n^{1/4}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{(-1)^n}{n^{1/4}} + O(\frac{1}{(n^{1/4})^2})\right)$$

On développe :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n n^{1/4}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O(\frac{1}{n^{1/2}}).$$

On obtient à nouveau la somme de trois séries : la première est une série alternée, donc CV ; la seconde est une série de Riemann avec $\alpha = 3/4 < 1$, donc DV, mais on ne peut rien dire de la convergence absolue de la troisième puisque :

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O(\frac{1}{n^{1/2}})\right| \leq \frac{A}{n}$$

et la série $\sum 1/n$ n'est pas convergente.

Il faut donc faire un DL en 0 de $1/(1+x)$ à un ordre plus grand. On écrit donc :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3).$$

Il faut recommencer les calculs. On arrive à :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^{1/4}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n^{3/4}} + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O(\frac{1}{(n^{1/4})^3})).$$

On a ici une somme de quatre séries. La première et la troisième sont des séries alternées, donc CV ; la seconde est une série de Riemann avec $\alpha = 3/4 < 1$, donc DV ; la quatrième est absolument convergente, donc CV car :

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} O(\frac{1}{n^{3/4}})\right| \leq \frac{A}{n^{5/4}}$$

et $5/4 > 1$. Donc notre série est divergente : somme de plusieurs séries CV et d'une série DV.