Licence 3
Analyse 1
2024-2025

Exercices : Séries

1. Calculer les sommes suivantes :

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} 5^n; \qquad R_n = \sum_{n=0}^{N} 1;$$

$$Q_N = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n; \qquad T_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} \right);$$

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{3^k} \right); \qquad V_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)};$$

$$W_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}; \qquad X_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \cos((2p+1)x/2);$$

Indications. Pour le calcul de U_n : commencer par calculer $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$. Pour le calcul de $X_n(x)$, on pourra reconnaître une série télescopique, ou bien utiliser la formule qui donne une expression de $\cos \alpha$ en fonction d'exponentielles complexes.

2. Déterminer, si elles existent, la limite des suites Q, R, S, T, U, V, W et $X(x)$ définies dans l'exercice précédent.

3. Si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite u tend vers 0. Pourquoi ? Qu'en est-il de la réciproque ?

4. *Série harmonique.* Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $u_n = \dfrac{1}{n}$ et

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_{2n} - S_n \geq \frac{n}{2n}.$$

La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

5. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. Peut-on en déduire que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ est convergente ?

6. Savoir-faire : *1. Majorer le terme général d'une série à termes positifs pour démontrer qu'elle est convergente. 2. Le minorer pour montrer qu'elle est divergente.*

Étudier la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{5n^4+n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sin^2 n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{4+\cos n}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2\ln n}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^3}$;

(h) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^{k-1}}{1+n^{2k}}$, où $k>0$;

7. Savoir-faire : *Majorer (ou minorer) à partir d'un certain rang le terme général d'une série à termes positifs pour démontrer qu'elle est convergente (ou divergente).* On peut pour cela utiliser les croissances comparées.

Étudier la nature des séries suivantes :

(a) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^{\sqrt{n}}}{e^n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n}\ln n}$;
(comparer avec $1/n^{3/4}$)

(j) $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2}{(\ln n)^{\ln n}}$.
(comparer avec $1/n^2$).

8. Savoir-faire : *Étudier la convergence d'une série à termes positifs en déterminant un équivalent plus simple de son terme général.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}\right); \qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right);$$

$$(c)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{1}{n}\right); \qquad (d)\quad \sum_{n\geq 1}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)^p;$$

$$(e)\quad \sum_{n\geq 1}\sqrt{n}\left(e^{1/n^2}-1\right); \qquad (f)\quad \sum_{n\geq 1}2^n\sin\left(\frac{\pi}{3^n}\right).$$

$$(g)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\ln n+\sqrt{n}}{3n^2+\sin n}; \qquad (h)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^3+2^n}{n^2+3^n}.$$

9. Savoir-faire : *Utiliser le critère de D'Alembert pour étudier la convergence d'une série à termes positifs.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}; \qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{2^n n!}{n^n};$$

$$(c)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!}\,x^n \quad \text{avec } x>0;$$

10. Savoir-faire : *Étudier la convergence absolue d'une série pour démontrer qu'elle est convergente.*

Étudier la convergence absolue des séries suivantes. En déduire la nature de ces séries lorsque c'est possible. Dans les questions (d) et (e), x est un réel quelconque.

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos(n^3+2)}{n^4+n}; \qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{n^2\sin n-1}{2^n-2\ln n};$$

$$(c)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{\cos n}{n^4+\sin n}; \qquad (d)\quad \sum_{n\geq 1}\frac{x^n}{n!};$$

$$(e) \quad \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{2n}\right) x^n; \qquad (f) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\sin(nx)}{n^2+1}.$$

$$(g) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2-5n+3}; \qquad (h) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos(e^{nx})}{n^2+\ln n}.$$

11. Savoir-faire : *Utiliser le critère des séries alternées pour étudier la convergence d'une série.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^p}; \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n^2+3};$$

$$(c) \quad \sum_{n\geq 0} (-1)^n \left(\frac{2n+3}{3n+1}\right); \qquad (d) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{\cos n\pi}{n+1};$$

$$(e) \quad \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1} \text{ avec } x \in \mathbb{R}; \qquad (f) \quad \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{n+2}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

12. Savoir-faire : *Savoir reconnaître une série alternée même si on ne la voit pas du premier coup d'oeil.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a) \quad \sum_{n\geq 1} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right); \qquad (b) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$(c) \quad \sum_{n\geq 1} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]. \qquad (d) \quad \sum_{n\geq 1} \frac{1+(-1)^n n}{n^2}.$$

Indications :

- (a) : écrire $\sin(n\pi+\alpha)$ en fonction de $\sin\alpha$; puis écrire $\pi\sqrt{n^2+1} = n\pi+\alpha_n$, avec α_n à déterminer.
- (b) : si n est impair, n s'écrit : $n = 2k+1$. En déduire une autre écriture de la série.
- (c) : poser $u_n = (-1)^n \ln\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n^p}\right]$ puis calculer $u_{n+1} - u_n$ en séparant le cas n pair et n impair.

13. Savoir-faire : *Savoir quoi faire quand on a tout essayé en vain.* Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}; \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1} \ln(\cos\frac{1}{n}).$$

Indication. Faire un développement limité en faisant bien attention au reste.

14. Savoir-faire : *Savoir choisir la bonne méthode pour étudier la nature d'une série.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1} \tan\left(\frac{1}{n}\right); \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1} \ln(\cos\frac{1}{n});$$

$$(c)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n^2-1)}. \qquad\qquad (d)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

$$(d)\quad \sum_{n\geq 0} \frac{2n-1}{2^n}. \qquad\qquad (e)\quad \sum_{n\geq 0} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{n/2}.$$

$$(f)\quad \sum_{n\geq 0} \frac{(n+1)^n}{n!}x^n. \qquad\qquad (g)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{a}{n}\right).$$

$$(h)\quad \sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{a}{n}\right). \qquad\qquad (i)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\sin\left(\frac{a}{n}\right).$$

15. Savoir-faire : *Savoir choisir la bonne méthode pour étudier la nature d'une série.*

Étudier la nature des séries suivantes :

$$(a)\quad \sum_{n\geq 1} \ln(1+n); \qquad\qquad (b)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{3^{2n}}{n!};$$

$$(c)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2}. \qquad\qquad (d)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n}.$$

$$(d)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\cos n+\sin n}{n^2+\sin n}. \qquad\qquad (e)\quad \sum_{n\geq 0} \sqrt{n}\,(\cos(1/n)-1)\,.$$

$(f)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{n^4-(-1)^n n}{5n^3-\ln(\ln(n))}.$

$(g)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{\sqrt{n}}.$

$(h)\quad \sum_{n\geq 2} n\ln\left(1+\frac{1}{n^3}\right).$

$(i)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{\ln(\ln n)}.$

$(j)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{3^n}{5\ln(n)+2}.$

$(k)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^{51}}.$

$(l)\quad \sum_{n\geq 0} \frac{-n^2-n+1}{n+3}.$

$(m)\quad \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$

$(n)\quad \sum_{n\geq 1} \left(\sin\left(\frac{1}{n+1}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right).$

$(o)\quad \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\right).$

$(p)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{e^n}.$

$(q)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{4-(-1)^n n}{n\sqrt{n}}.$

$(r)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n+1}{n^2-6n-3}.$

$(s)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{(\ln n)^2}.$

$(t)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{1}{n^2\ln n}.$

$(u)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+(-1)^n\sqrt{n}}{n}.$

$(v)\quad \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$

$(w)\quad \sum_{n\geq 1} \sqrt{n}\left(e^{1/n^2}-1\right).$

$(x)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n\sqrt{n}}.$

$(y)\quad \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n n^{1/4}}.$