Feuille 1
Exercice 10
Questions 2 et 3

Pour $n \geq 1$ on note $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$

On a vu dans la partie 1. que
$$\ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n) + 1, \quad \forall n \geq 1$$

ce qui donne $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$

2) Pour tout $n \geq 1$, on pose $u_n = H_n - \ln(n)$

a) Déterminer un équivalent simple de $u_{k+1} - u_k$

On a $u_{k+1} - u_k = \left(H_{k+1} - \ln(k+1)\right) - \left(H_k - \ln(k)\right)$

$$= \underbrace{\frac{1}{k+1}}_{H_{k+1} - H_k} + \ln(k) - \ln(k+1) = \frac{1}{k+1} + \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \frac{1}{k+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{k+1}\right)$$

On va utiliser le DL $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x)$ avec $x = -\frac{1}{k+1} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

$$= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \varepsilon\left(\frac{1}{k+1}\right)$$

$$= -\frac{1}{2(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \varepsilon\left(\frac{1}{k+1}\right), \text{ avec } \varepsilon\left(\frac{1}{k+1}\right) \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Par conséquent

$$\boxed{u_{k+1} - u_k \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2(k+1)^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2k^2}}$$

Montrer que la série
$$\sum_{k\geq 1} (u_{k+1}-u_k)$$ converge

Comme $u_{k+1}-u_k \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2k^2}$ (termes de signe constant, négatifs)

le critère des équivalents s'applique :
$\sum -\dfrac{1}{2k^2}$ converge, donc $\sum (u_{k+1}-u_k)$ converge.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

On a $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} (u_{n+1}-u_n) = (u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\dots$

$\dots + (u_N - u_{N-1}) + (u_{N+1}-u_N) = u_{N+1}-u_1$

$= u_{N+1}-1$ $\quad (u_1 = H_1 - \ln(1) = H_1 = 1)$

Soit $S \in \mathbb{R}$ la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (u_{n+1}-u_n)$.

Comme $u_{N+1} = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{N} (u_{n+1}-u_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 1+S$

la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge.

On note $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. On a donc établi
$$H_n = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n, \text{ avec } \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

En effet, comme $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$, $\varepsilon_n = u_n - \gamma \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où le résultat.

Remarque : le réel γ est une constante classique ("constante d'Euler"). On a $\gamma = 0.5772156649...$

On peut poursuivre le développement asymptotique :

$$H_n = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{2n} + \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$$

Voir Xavier Gourdon "Les Maths en tête : Analyse" (chez Ellipses) page 203

3. Pour tout $n \geq 1$ on note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

a) $\boxed{\text{Montrer que } S_{2n} = H_{2n} - H_n}$

Il suffit de remarquer que

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$$

$$\overset{(*)}{=} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= H_{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

$$= H_{2n} - H_n$$

(*) Remarquer que $\frac{1}{2} - 2\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{4}$ ...

En déduire que la suite $(S_{2n})_{n\geq 1}$ converge vers une limite qu'on précisera

On obtient $S_{2n} = H_{2n} - H_n \underset{\text{question 2b)}}{=}$

$$= \left(\ln(2n) + \gamma + \varepsilon_{2n}\right) - \left(\ln(n) + \gamma + \varepsilon_n\right)$$

$$= \ln(2) + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$$

b) En déduire enfin que la série anharmonique

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

converge et donner sa somme.

Comme $S_{2n+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1}$

on a aussi $S_{2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(2)$

Les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers la même limite $(\ln(2))$ donc la suite (S_n) converge vers cette limite :

la série anharmonique converge et

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln(2)$$

Remarque : Le critère des séries alternées donne facilement la convergence de cette série.