Feuille 1 Exercice 12

Grâce au critère des séries alternées, étudier la convergence de la série de terme général :

$$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt \qquad \left(\begin{array}{c}\text{on considère}\\ n \geq 1\end{array}\right)$$

Etudier ensuite la convergence absolue de la série

- On va mettre en évidence la nature alternée de la série à l'aide du changement de variable

$$t = u + n\pi \quad (\Leftrightarrow u = t - n\pi)$$

Si $t = n\pi \Rightarrow u = 0$
si $t = (n+1)\pi \Rightarrow u = \pi$ et $du = dt$
donc

$$v_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{\pi} \frac{\sin(u + n\pi)}{u + n\pi}\, du$$

$$= (-1)^n \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + n\pi}\, du$$

$\sin(u+\pi) = -\sin(u)$
donc $\sin(u + n\pi) = (-1)^n \sin u$

Soit $\boxed{a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + n\pi}\, du}$, $\forall n \geq 1$

Comme $\sin u \geq 0$ si $u \in [0, \pi]$, $a_n \geq 0$

et la série de terme général $\boxed{v_n = (-1)^n a_n}$ est une série alternée.

• Montrons que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est décroissante.

Soit $u \in [0, \pi]$: on a $\dfrac{1}{u+(n+1)\pi} \leq \dfrac{1}{u+n\pi}$

pour tout $n \geq 1$. Comme $\sin u \geq 0$, il vient

$$\frac{\sin u}{u+(n+1)\pi} \leq \frac{\sin u}{u+n\pi} \quad \text{d'où}$$

$$a_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+(n+1)\pi}\, du \leq \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\, du = a_n$$

• Montrons que $a_n \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$.

Si $u \in [0, \pi]$ et $n \geq 1$ on a

$$\left.\begin{array}{l} 0 \leq \sin u \leq 1 \\ 0 \leq \dfrac{1}{u+n\pi} \leq \dfrac{1}{n\pi} \end{array}\right\}$$

En multipliant membre à membre les deux inégalités (réels positifs !)

on obtient

$$0 \leq \frac{\sin u}{u+n\pi} \leq \frac{1}{n\pi} \quad \text{et}$$

$$0 \leq \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\, du}_{a_n} \leq \int_0^{\pi} \underbrace{\frac{1}{n\pi}}_{\text{constante}}\, du = \frac{1}{n\pi}\cdot\pi = \frac{1}{n}$$

et le th. d'encadrement donne $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

• La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est à termes positifs, décroissante et tend vers 0 si $n \to +\infty$. donc (critère des séries alternées) la série $\sum\limits_{n\geq 1} (-1)^n a_n$ converge.

- Etudions la convergence absolue de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$

$v_n = (-1)^n a_n$ donc $|v_n| = |a_n| = a_n$, $\forall n \geq 1$

Si $0 \leq u \leq \pi$, $\dfrac{1}{u+n\pi} \geq \dfrac{1}{\pi+n\pi}$

On multiplie par $\sin u$ (≥ 0) :

$$\frac{\sin u}{u+n\pi} \geq \frac{\sin u}{(n+1)\pi}$$ et finalement

$$|v_n| = a_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+n\pi}\,du \geq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_0^{\pi} \sin u\,du =$$

$$\frac{1}{(n+1)\pi}\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{(n+1)\pi}\Big(-(-1)+1\Big) = \frac{2}{(n+1)\pi}$$

Récapitulons $|v_n| = a_n \geq \dfrac{2}{(n+1)\pi} \geq 0$

précision importante !!

Comme $\sum \dfrac{2}{(n+1)\pi}$ diverge

le critère de comparaison donne la divergence de la série $\sum |v_n|$.

Conclusion : $\sum v_n$ ne converge pas absolument.