Planche 3

Une histoire de familles

À partir de cette feuille, nous emploierons souvent la notation Vect, désignant l'ensemble des combinaisons linéaires d'un ou plusieurs vecteurs d'un espace vectoriel. Précisément, si E est un espace vectoriel et si $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (avec $n \geq 1$ un nombre entier) sont des éléments de E (donc des vecteurs), on note :

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \left\{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}$$

On emploiera également souvent le terme de *famille* de vecteurs, qui désigne simplement le fait de considérer plusieurs vecteurs. Par exemple avec les notations précédentes, $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une famille de n vecteurs.

Exercice 24 ().

1. Montrer que $\mathbb{R}_+$ et $(\mathbb{R}_+)^2$ ne sont pas des espaces vectoriels.
2. Expliquer pourquoi les propriétés de stabilité par addition et stabilité par multiplication par un scalaire (deux propriétés fondamentales des espaces vectoriels) sont nécessaires pour les ensembles de départ et d'arrivée d'une application linéaire.

Correction

1. *Ces deux ensembles ne sont pas stable par combinaison linéaires. Par exemple,* $1 \in \mathbb{R}_+$ *et* $2 \in \mathbb{R}_+$ *mais* $1 - 2 = -1 \notin \mathbb{R}_+$.

   De même, $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \in (\mathbb{R}_+)^2$ *mais*

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \notin (\mathbb{R}_+)^2$$

2. *vu en bilan*

Exercice 25 ().

Afin d'examiner visuellement sa parcelle dans sa globalité, une agricultrice utilise un drone en vol stationnaire (immobile) au-dessus de celle-ci, ce qui permet de réaliser des modèles numériques de terrain.

Le drone possède deux moteurs lui permettant de se stabiliser face au vent. Dans un repère "drono-centrique", on suppose que le vent souffle dans deux directions, celle du vecteur $\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}$ et celle du vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, résultant en une force appliquée sur le drone qui est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

Les deux moteurs, eux, propulsent dans les directions données respectivement par les vecteurs

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$, résultant en une force appliquée sur le drone qui est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

1. Écrire avec la notation Vect :
   (a) L'ensemble E_v représentant toutes les forces possibles dues au vent.
   (b) L'ensemble E_m représentant toutes les forces possibles dues aux moteurs du drone.
2. Le drone peut-il bien se stabiliser ? Quelle inclusion cela représente entre les deux ensembles E_v et E_m ?
3. Que peut-on dire finalement sur E_v et E_m ? *(on pourra utiliser par exemple une interprétation géométrique de ces ensembles)*
4. Pour pallier à d'éventuelles variations imprévues du vent, l'agricultrice souhaite bricoler un troisième moteur. Elle a un peu de marge de manœuvre pour le fixer sur le drone afin qu'il propulse dans la direction du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ (avec $t \in \mathbb{R}$ une valeur qu'elle doit choisir). Quelle valeur de t ne conférerait aucun avantage supplémentaire ?

Correction

1. (a) $E_v = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$

   (b) $E_m = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

2. *Le drone peut se stabiliser si la force due au vent peut-être compenser par la force due au moteur, autrement dit si $E_v \subset E_m$ (si toute force du vent peut s'écrire comme une force des moteurs, alors les moteurs pourront bien contrer la force du vent.*

   Or, on a d'une part

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   et d'autre part

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 3 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

   Et donc toute combinaison linéaire de ces deux vecteurs résultera en une combinaison linéaire des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

   Ainsi,

$$\text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \subset \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

3. *On a déjà démontré une inclusion. En fait, puisque les deux vecteurs ne sont à chaque fois pas colinéaires, les deux ensembles sont des plans. On a donc deux plans dont*

l'un est inclus dans l'autre, intuitivement ils ne peuvent qu'être égaux. Ce qui peut se formaliser en démontrant, de la même manière que précédemment, que $E_m \subset E_v$.

4. *Si le vecteur $\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}$ représente une force qui peut déjà être obtenue avec les deux autres moteurs, ce n'est pas très utile. Autrement dit il n'y aura aucun avantage si*

$$\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} \in E_m$$

c'est-à-dire s'il existe λ_1 et λ_2 des réels tels que

$$\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix}$$

Pour que l'égalité soit vraie sur la deuxième coordonnée, il faut nécessairement $\lambda_2 = -1$. Et donc maintenant l'égalité sur la première coordonnée est :

$$1 = \lambda_1 - 1$$

Donc $\lambda_1 = 2$.
En injectant ces valeurs dans la troisième coordonnée on obtient :

$$t = 2 \times 3 - 5 = 1$$

Donc si $t = 1$ cela ne confère aucun avantage.

Exercice 26 ().
Déterminer si les ensembles suivants forment un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$:

1. l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}2\\5\\z\end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$
2. l'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Correction

Exercice 26 :

Déterminer si les ensembles suivant forment un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

1- L'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$ avec $z \in \mathbb{R}$

Vecteur nul :

On sait que le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$ est $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
On veut savoir si le vecteur nul appartient à l'ensemble $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ z \end{pmatrix}$

Ici nous avons $x = 2$ $y = 5$ des variable fixe non modifiable donc le vecteur nul n'appartient pas à l'ensemble, donc ce n'est pas un sous-espace vectoriel.

2- L'ensemble des vecteurs de la forme $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$

Vecteur nul :

Ici nous avons $z = 0$ et x, y des variables.
Si on pose $x = 0$ et $y = 0$, on obtient le vecteur nul $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc l'ensemble $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ contient le vecteur nul, vérifions maintenant la stabilité par addition et par multiplication.

Par + : on pose $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ deux vecteur de $\mathbb{R}^3$.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ La forme du vecteur est conservé donc, l'ensemble est stable par +.

Par × : On prend le vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

on a : $\lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$ La forme du vecteur est maintenue donc l'ensemble est stable par ×.

L'ensemble $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $x, y \in \mathbb{R}$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ car respect les 3 critères.

Exercice 27 ().
On dispose de trois applications linéaires :

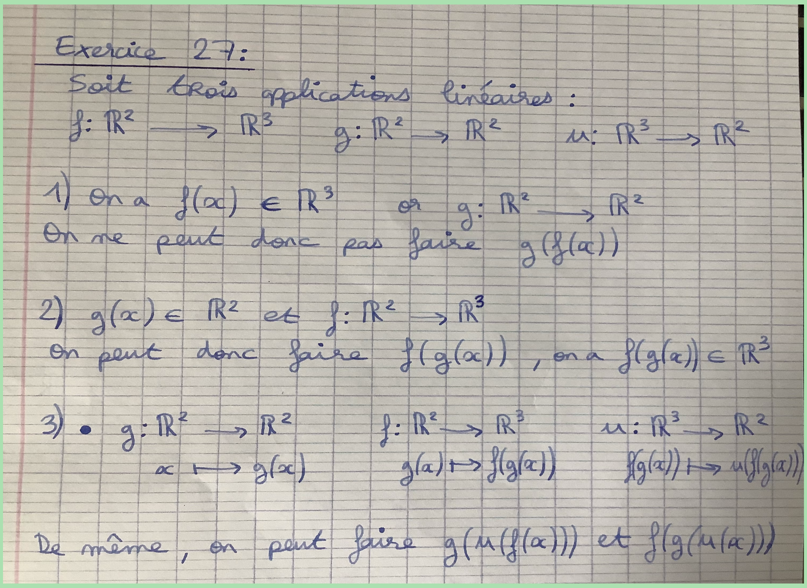
- $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$
- $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
- $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

1. Peut-on faire $g\big(f(x)\big)$?
2. Peut-on faire $f\big(g(x)\big)$?
3. Peut-on appliquer successivement les trois applications ? Dans quel(s) ordre(s) ?
4. On peut également effectuer $g\big(u(x)\big)$. On appelle alors c l'application définie par :

$$c(x) = g\big(u(x)\big)$$

   Préciser les espaces de départ et d'arrivée de c, et montrer que c'est une application linéaire.

Correction



Exercice 27 :
Soit trois applications linéaires :
$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ $\quad u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

1) On a $f(x) \in \mathbb{R}^3$ or $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$
On ne peut donc pas faire $g(f(x))$

2) $g(x) \in \mathbb{R}^2$ et $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$
On peut donc faire $f(g(x))$, on a $f(g(x)) \in \mathbb{R}^3$

3) • $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $x \longmapsto g(x)$ $\quad f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $g(x) \longmapsto f(g(x))$ $\quad u : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(g(x)) \longmapsto u(f(g(x)))$

De même, on peut faire $g(u(f(x)))$ et $f(g(u(x)))$

Pour la dernière question :
L'application c va de $\mathbb{R}^3$ (espace de départ de u) vers $\mathbb{R}^2$ (espace d'arrivée de g). Montrons que c est linéaire.
On pose $x, y \in \mathbb{R}^3$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

$$\begin{aligned} c(\lambda x + y) &= g\big(u(\lambda x + y)\big) \\ &= g\big(\lambda u(x) + u(y)\big) && \textit{par linéarité de } u \\ &= \lambda g\big(u(x)\big) + g\big(u(y)\big) && \textit{par linéarité de } g \\ &= \lambda c(x) + c(y) \end{aligned}$$

Ainsi l'application est bien linéaire.

Exercice 28 ().
Green-Got est une entreprise française proposant un compte financier alternatif qui finance la transition écologique et énergétique (et pas le pétrole, le charbon ou le gaz, comme c'est le cas dans la très grande majorité des banques traditionnelles) grâce à l'argent de ses membres. Elle propose aussi depuis peu un premier produit d'épargne-investissement (une assurance-vie), pour que les économies financent la transition écologique et énergétique.
L'assurance-vie est un des produits d'épargne "préférés" des Français et Françaises : c'est celui qui concentre le plus d'argent parmi tous les produits d'épargne disponibles. C'est un produit souple (choix de ce que l'on souhaite financer), les taux sont souvent plus intéressants que ceux des "livrets" mais il y a en contrepartie un risque de perte en capital (perte d'une partie de l'argent investi) en fonction du profil de risque choisi.
L'assurance-vie de Green-Got propose quatre profils de risque, qui correspondent à quatre répartitions différentes de l'argent investi :

- **Sage :** 70% de l'argent investi est sur des "obligations" (prêt à un État ou une entreprise privée), 30% dans l'investissement immobilier.
- **Équilibré :** 50% en "obligations", 30% dans l'immobilier, 20% dans des "actions" (part de propriété d'une entreprise)
- **Audacieux :** 30% en "obligations", 70% en "actions"

- **Intrépide :** 20% dans l'immobilier, 80% en "actions"

1. Une personne souhaite épargner 100e sur l'assurance-vie Green-Got en profil "Audacieux". Pourrait-elle à la place épargner une somme différente répartie sur les profils "Sage" et "Équilibrer", tout en gardant la même répartition que dans le profil Audacieux ?
2. Une personne souhaite épargner 100e sur l'assurance-vie Green-Got en profil "Intrépide". Pourrait-elle à la place épargner une somme différente répartie sur les profils "Sage", "Équilibrer" et "Audacieux, tout en gardant la même répartition que dans le profil intrépide ?

Exercice 29 ().
Soit $n \geq 2$ un entier et $p \geq 1$ un entier. On considère $v_1, v_2, \ldots, v_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$

1. Démontrer que $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est un espace vectoriel.
2. Peut-on trouver un espace vectoriel E plus petit (au sens où on aurait $E \subsetneq \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$) contenant les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$?

Correction

1. *D'une part, puisque $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, toute combinaison linéaire de ces vecteurs est aussi un vecteur de $\mathbb{R}^n$. Ainsi :*

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p) \subset \mathbb{R}^n$$

De plus, $0 = 0 \times v_1 + 0 \times v_2 + \cdots + 0 \times v_n$ donc

$$0 \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$$

Reste à montrer la stabilité par combinaison linéaire :
Posons $v, w \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On veut montrer que $\lambda v + w \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$, c'est-à-dire que $\lambda v + w$ peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs $(v_1, v_2, \ldots, v_p)$.
Or, puisque $v, w \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ on peut écrire :

$$v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i \qquad \text{et } w = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n$ des scalaires.
Mézalor,

$$\lambda v + w = \lambda \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda \lambda_i + \mu_i) v_i$$

Ce qui est bien une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$.
Ainsi, $\lambda v + w \in \mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ et donc $\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ est un espace vectoriel (puisque c'est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$).

2. *Si E est un espace vectoriel contenant les vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_p$, et puisqu'il est stable par combinaison linéaire, il contient forcément toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs. Ce qui signifie exactement que*

$$\mathrm{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p) \subset E$$

On ne peut donc pas avoir $E \subsetneq \operatorname{Vect}(v_1, v_2, \ldots, v_p)$ car il y aurait alors double inclusion et donc égalité des ces deux espaces.

Exercice 30 ().

Pour tout matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit la *trace* de M par :

$$\operatorname{tr}(M) = a + d$$

1. Démontrer que l'application $\operatorname{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ainsi définie est linéaire.
2. Démontrer que l'ensemble

$$E = \{P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \operatorname{tr}(P) = 0\}$$

   est un espace vectoriel.
3. Déterminer trois matrices M_1, M_2 et M_3 telles que $E = \operatorname{Vect}\big(M_1, M_2, M_3\big)$
   (les matrices M_1, M_2 et M_3 forment alors ce que l'on nomme une famille génératrice de E)

Exercice 31 ().

Soit E un espace vectoriel et soit $n \geq 1$ un nombre entier. On considère une famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E.

1. Quelles valeurs de scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ vont de manière évidente permettre d'avoir l'égalité $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$? On dit alors que cette combinaison linéaire est *triviale.*

Définition 2: Famille libre/famille liée, indépendance/dépendance

On dit que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est *libre* (ou *linéairement indépendante*) si aucune combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs n'est égale au vecteur 0.

Au contraire s'il existe d'autres combinaisons linéaires permettant d'obtenir 0, la famille est dite *liée* (ou *linéairement dépendante*).

2. Supposons que la famille $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ soit liée. Expliquer pourquoi cela signifie qu'on peut exprimer un des vecteurs comme une combinaison linéaire des autres.
3. Inversement, supposons qu'on peut exprimer un des vecteurs de la famille en fonction des autres. Expliquer pourquoi cela signifie que la famille est liée.

Exercice 32 ().

Déterminer les noyaux des deux applications linéaires suivantes :

1. Dans $\mathbb{R}^2$, la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
2. L'application "shadow" S qui transforme tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ en son "ombre" (x, y) dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 33 ().

Soient E et F deux espaces vectoriels. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Si u et v sont deux vecteurs du noyau de T, calculer $T(au + bv)$ pour n'importe quels scalaires a et b.

Exercice 34 ().

Soit E un espace vectoriel. On considère F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Démontrer que $F_1 \cap F_2$ est un espace vectoriel.
2. Démontrer que $F_1 + F_2$ est un espace vectoriel.