Exercice 30

1) Posons $M_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $M_2 = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$

dans $M_2(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Mq $tr(\lambda M_1 + M_2) = \lambda\, tr(M_1) + tr(M_2)$

Or, $tr(\lambda M_1 + M_2) = tr\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right)$

$= tr\left(\begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda c + c' & \lambda d + d' \end{pmatrix}\right)$

$= \lambda a + a' + \lambda d + d'$

$= \lambda(a + d) + a' + d'$

$= \lambda\, Tr(M_1) + tr(M_2)$

2) • $E \subset M_2(\mathbb{R})$

• $\text{Tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 + 0 = 0$

Donc $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in E$ et $E \neq \emptyset$.

• Posons $M_1, M_2 \in E$, et $\lambda \in \mathbb{R}$

Montrons que $\lambda M_1 + M_2 \in E$.

Or, $tr(\lambda M_1 + M_2) = \lambda\, tr(M_1) + tr(M_1)$ car tr est linéaire

$= \lambda \times 0 + 0$ car $M_1, M_2 \in E$

$= 0$

Donc on a bien $\lambda \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \in E$

Donc E est SEV de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3) on cherche $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_3$ telles que toute matrice de E s'écrit $\lambda_1 \mathcal{M}_1 + \lambda_2 \mathcal{M}_2 + \lambda_3 \mathcal{M}_3$.

Soit $\mathcal{M} \in E$.

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$= a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec a, b, c quelconques et indépendants donc $E = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$

Exercice 31 :

Soit $(v_1, \ldots, v_n)$ une famille de vecteurs de E.

1) avec $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$$

2) Supposons que la famille est liée.

on peut trouver $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i = 0$ avec au moins un coefficient $\lambda_j \neq 0$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_j v_j + \cdots + \lambda_n v_n = 0$$

$\neq 0$

Alors $v_j = -\frac{1}{\lambda_j}\left(\sum_{i \neq j} \lambda_i v_i\right)$ $\left(= \frac{-\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 \cdots - \lambda_n v_n}{\lambda_j} \right)$

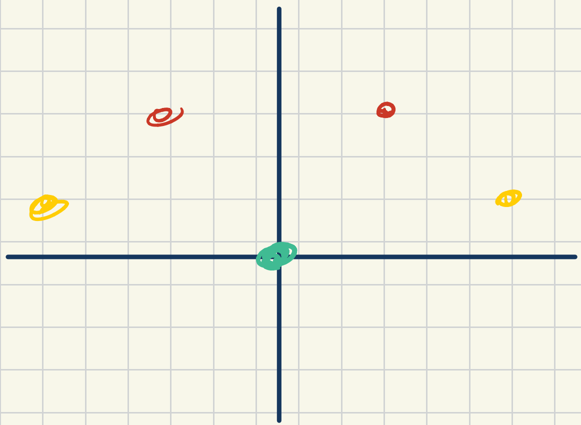
3) Supposons qu'un des vecteurs de la famille s'exprime en fonction des autres ; il existe j tel que

$$v_j = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \underbrace{\dots}_{\hookrightarrow\ v_j \text{ n'intervient pas}} \lambda_n v_n \quad \text{avec } \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \underbrace{-}_{\hookrightarrow\ \neq 0} v_j = 0$$

Donc la famille est liée

Exercice 32 :



Notons s la symétrie rapport à l'axe des ordonnées.

On cherche $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tels que $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

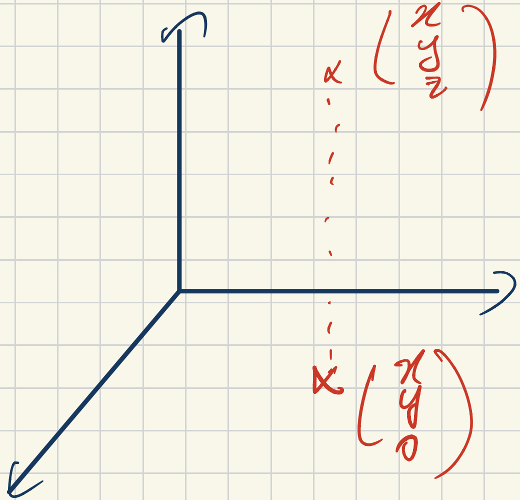
Or $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}$.

Donc $s\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\iff x = 0$ et $y = 0$.

$\mathrm{Ker}(s) = \{0\}$

2)



$$S\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$\iff$ $x=0$
et $y=0$.

Donc $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in \mathrm{Ker}(S) \iff \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$

Donc $\mathrm{Ker}(S) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$