

Feuille d'exercices n°1 — Fonctions

Exercice 1 - Déterminer le domaine de définition naturel des fonctions définies par les formules

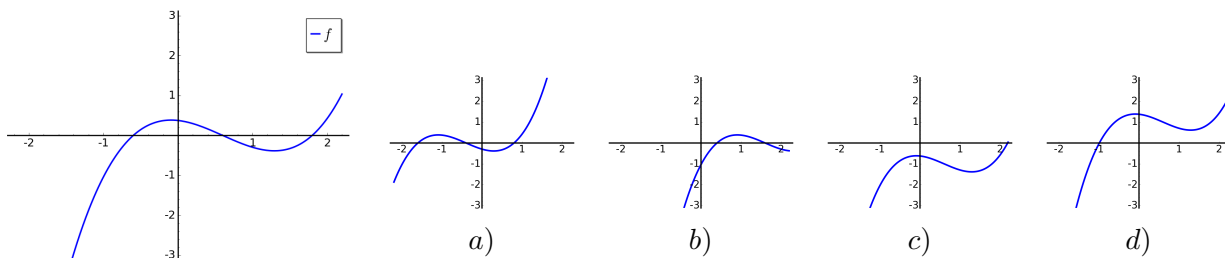
$$f(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 5}, \quad h(x) = \ln(4x + 3).$$

Exercice 2 - On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout x de \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

1. Quelle est l'image de la fonction $f|_E$, restriction de la fonction f à l'ensemble E , lorsque $E = [-5, -2], [-1, 3], [-5, -2] \cup [-1, 3]$?

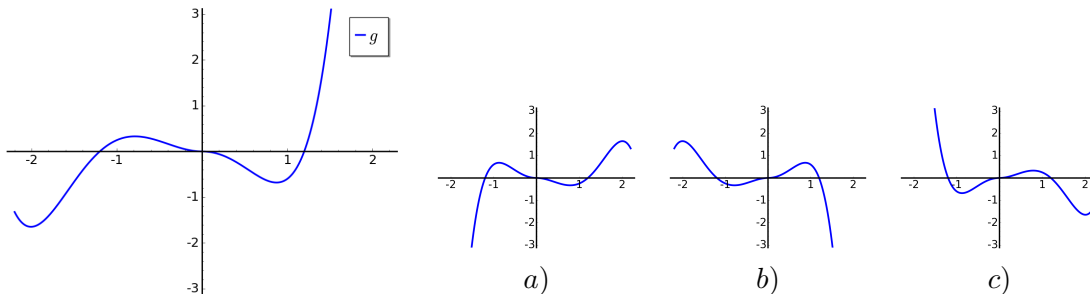
2. Déterminer les ensembles $f([-5, -2] \cap [-1, 3])$ et $f([-5, -2]) \cap f([-1, 3])$.

Exercice 3 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction f . Parmi les quatre dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto f(x) - 1$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto f(x) + 1, x \mapsto f(x + 1), x \mapsto f(x - 1)$.

Exercice 4 - Le premier dessin représente le graphe d'une fonction g . Parmi les trois dessins suivants, lequel représente la fonction $x \mapsto -g(x)$?



Même question pour les fonctions $x \mapsto g(-x), x \mapsto -g(-x)$.

Exercice 5 - Soit a et b deux nombres réels et f la fonction donnée par la formule $f(x) = ax + b$. On travaille dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe Ox , puis par la symétrie d'axe Oy .
2. Pour chacune des courbes obtenues, donner une fonction dont elle est le graphe.
3. Déterminer l'équation de l'image du graphe de f par la symétrie d'axe Δ , la droite donnée par l'équation $y = x$. À quelle condition la droite obtenue est-elle le graphe d'une fonction ?

Exercice 6 - Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Déterminer graphiquement les images réciproques des intervalles $[0, 1[$, $]\frac{1}{2}, 1]$, $[1, 2]$ et $]1, 3]$.

Exercice 7 - Les fonctions suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Déterminer leur image. Déterminer les fonctions réciproques quand celles-ci existent.

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto x^2 \end{cases}, \quad h : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 - x \end{cases}.$$

Exercice 8 - Dire si les fonctions suivantes sont injectives sur leur domaine de définition. Déterminer leur image, et les fonctions réciproques quand celles-ci existent.

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}, \quad h(x) = \ln(\sqrt{x-1} + 1).$$

Exercice 9 - On définit deux fonctions sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ par $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et $g : x \mapsto 1 - x$. Vérifier que l'on peut composer ces fonctions puis donner les expressions des composées $f \circ g$ et $g \circ f$.

Exercice 10 - Soit f et g deux fonctions définies sur un même sous-ensemble E de \mathbb{R} .

1. Montrer que si f et g sont croissantes sur E , alors $f + g$ est croissante sur E .
2. Montrer que si f et g sont positives et croissantes sur E , la fonction produit $f \cdot g$ est croissante sur E .
3. On suppose que $f \circ g$ est définie sur E . Montrer que si f et g sont toutes les deux croissantes ou toutes les deux décroissantes sur E , alors la composée $f \circ g$ est croissante sur E .
4. En déduire la monotonie de la fonction $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (\ln(e + x^2) - 1)e^{2\sqrt{x}+3}$.

Plus difficiles.

Exercice 11 - Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux fonctions.

1. Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
2. Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.

Exercice 12 - Un jardin carré contient cinq arbres et vous avez une sangle à votre disposition. Votre sangle fait quelques mètres de plus que la moitié de la diagonale du jardin. Est-il possible de tendre votre sangle entre deux de ces arbres ?