Chapitre I - Fonctions d'une variable réelle
Variations sur des transparents de Maxime Février
Transparents * : compléments hors programme

20 septembre 2024

Nombres réels

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

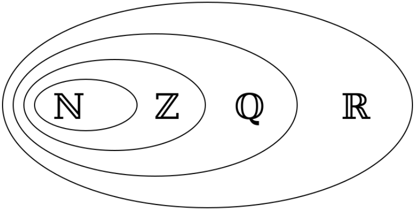
Toute partie non vide admet un plus petit élément$\Rightarrow$ Récurrence

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

Division euclidienne $a = bq + r,\ 0 \leq r < |q|$

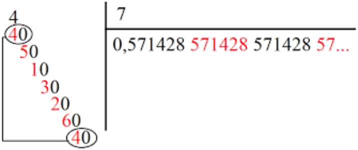
$$\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\}$$

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$$



Développement décimal (propre) et nombres réels

$$1/9 = 0,111111111111...$$
$$1/7 = 0,142857142857...$$
$$1/3 = 0,333333333333...$$
$$2/27 = 0,074074074074...$$
$$7/12 = 0,58333333333...$$



$\mathbb{Q}$={nombres à développement décimal (propre) "périodique"}

$\mathbb{R}$={nombres à développement décimal (propre) quelconque}

Partie entière $[x] \leq x < [x] + 1 \Rightarrow \mathbb{R}$ archimédien

$$0,101001000100001\cdots \notin \mathbb{Q} \quad \sqrt{2}, \mathrm{e}, \pi \notin \mathbb{Q}$$

on peut numéroter les entiers, les rationnels.
mais pas les tous les réels : "avec probabilité 1", un réel est irrationnel !

Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si pour tous réels $x < y < z$

$$x, z \in I \Rightarrow y \in I.$$

Proposition

Tout intervalle de $\mathbb{R}$ est de l'un des dix types suivants :

1. $]a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$,
2. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
3. $]a, b] = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$,
4. $[a, b[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$.
5. $\emptyset$
6. $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a < x\}$
7. $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x\}$
8. $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R},\ x \leq a\}$
9. $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R},\ x < a\}$
10. $\mathbb{R}$.

Majorant, borne supérieure

Définition

*$M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** d'un sous-ensemble non vide A de $\mathbb{R}$ si*
$\forall x \in A, x \leq M$

Définition

*On appelle **borne supérieure** d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ le **plus petit** des majorants de A (lorsqu'il existe).*

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)

Un réel M est la borne supérieure d'un sous-ensemble non vide $A \subset \mathbb{R}$ s'il vérifie :

1. $\forall x \in A,\ x \leq M$;
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A,\ M - \varepsilon < x \leq M$.

Propriété fondamentale

Théorème

Tout sous-ensemble ***non-vide*** *et* ***majoré*** *de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.*

Faux si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$.

$$\{x \in \mathbb{Q} | x^2 \leq 2\}$$

n'a pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

Fonction

Définition

Soient E, F deux ensembles. Une ***fonction*** *f de E vers F est la donnée, pour tout élément x de E d'un unique élément de F, noté $f(x)$.*

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

On dit aussi que :

- *E est l'ensemble de* ***départ****, F est l'ensemble d'****arrivée****.*
- *$f(x)$ est l'****image*** *de x par f ;*
- *x est* ***un antécédent*** *de $f(x)$ par f.*

Le plus souvent pour nous,

$$E = \text{« domaine de définition »} = \text{intervalle} - \text{nb fini de points}$$

Trouver les antécédents $x \in E$ de $y \in F$ c'est résoudre l'équation en x
$y = f(x)$.

Représentation graphique

Définition

Soient E, F deux ensembles. On appelle ***produit cartésien*** *de E et F l'ensemble $E \times F = \{(x,y), x \in E, y \in F\}$.*

Définition

Soient E, F deux ensembles et $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ une fonction de E vers F. Le ***graphe*** *de la fonction f est l'ensemble $\{(x,y) \in E \times F, y = f(x)\}$.*

Image directe, image réciproque

Définition

Soient E, F deux ensembles, $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *une fonction de E vers F et A un sous-ensemble de E. L'**image directe** de A par la fonction f est l'ensemble $f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, y = f(x)\}$.*

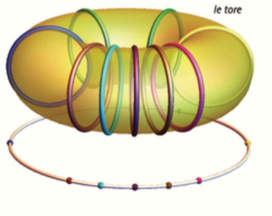
Définition

Soient E, F deux ensembles, $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$ *une fonction de E vers F et B un sous-ensemble de F. L'**image réciproque** de B par la fonction f est l'ensemble $f^{<-1>}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$. L'image réciproque de $B = \{y\}$ s'appelle la fibre de f et y et se note simplement $f^{<-1>}(y)$.*

Partitions*

Définition

Une famille de parties E_i deE est une partition de E si pour tout de $x \in E$ il existe un unique indice i tel que $x \in E_i$. Autrement dit, on a $E = \cup E_i$ et si $i \neq j$ alors $E_i \cap E_j = \varnothing$.



Dans ce cas $\mathrm{card}(E) = \sum_i \mathrm{card}(E_i)$.
Par exemple, si f est une fonction de E ver F, alors les fibres de f réalisent une partition de E. On a donc

$$\mathrm{card}(E) = \sum_{y \in F} \mathrm{card}(f^{<-1>}(y)).$$

Restriction, prolongement, composition

Définition

Soient E, F, G trois ensembles et $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux fonctions.

1. *Soit A un sous-ensemble de E. On dit que la fonction*

$$\begin{array}{rccc} f_{|A}: & A & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

   est ***la restriction*** *de f à A.*

2. *Soit $\overline{E}, \overline{F}$ des ensembles contenant E, F. Une fonction $\overline{f} : \overline{E} \longrightarrow \overline{F}$ est* ***un prolongement*** *de f à $\overline{E}$ si $\forall x \in E, \overline{f}(x) = f(x)$.*

3. *On appelle composée de f par g la fonction*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & E & \longrightarrow & G \\ & x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Injection

Définition

*Une fonction $f : E \longrightarrow F$ est **injective**, si tout élément de l'ensemble d'arrivée F admet **au plus un antécédent** par f dans l'ensemble de départ E. Autrement dit :*

$$\forall x, x' \in E, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Ou encore :

$$\forall x, x' \in E, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Fin du cours 1