Planche 2

Direction l'espace

Exercice 14 ().
On considère l'ensemble des polynômes de degré 1 :

$$\mathbb{P}_1 = \{a_0 + a_1 x \mid a_0, a_1 \in \mathbb{R}\}$$

On rappelle que deux polynômes $a(x) = a_0 + a_1(x)$ et $b(x) = b_0 + b_1(x)$ sont égaux si et seulement si $a_0 = b_0$ et $a_1 = b_1$.

1. On pose $a(x) = a_0 + a_1(x)$, $b(x) = b_0 + b_1(x)$ et $c(x) = b_0 + b_1(x)$ trois éléments de $\mathbb{P}_1$. Dans chaque cas ci-dessous, exprimer les calculs demandés sous la forme d'un élément de $\mathbb{P}_1$, c'est-à-dire sous la forme $\lambda_0 + \lambda_1 x$ avec λ_0 et λ_1 à préciser.
   (a) $a(x) + b(x)$
   (b) $a(x) + b(x)$ et $b(x) + a(x)$ (que constate-t-on ?)
   (c) $(a(x) + b(x)) + c(x)$ et $a(x) + (b(x) + c(x))$
   (d) $\lambda(a(x) + b(x))$ et $\lambda a(x) + \lambda b(x)$
   (e) $(\lambda + \mu)a(x)$ et $\lambda a(x) + \mu a(x)$
   (f) $(\lambda\mu)a(x)$ et $\lambda(\mu a(x))$
2. Déterminer l'élément $\tilde{a}(x)$ de $\mathbb{P}_1$ tel que $a(x) + \tilde{a}(x) = 0$
3. Pour quel nombre réel λ a-t-on $\lambda a(x) = a(x)$?

Dans toute la suite de ce cours, les objets centraux seront les ensembles qui vérifient le même type de propriété que dans ce premier exercice. On les appelle des *espaces vectoriels.*
Voici un récapitulatif de toutes les propriétés nécessaires :

Définition 1: Espace vectoriel

Soit E un ensemble dont les éléments peuvent être :

- additionnés
- multipliés par un scalaire

On dit que E est un espace vectoriel (ev) si et seulement si les propriétés suivantes sont satisfaites pour n'importe quels éléments u, v, w de E et n'importes quels scalaires λ et μ :
- l'addition vérifie :

- $u + v \in E$ *(stabilité par addition)*
- $u + v = v + u$. *(la commutativité)*
- $(u + v) + w = u + (v + w)$. *(l'associativité)*
- Il existe un élément 0_E appelé élément neutre tel que
  $0_E + u = u = u + 0_E$.
- il existe un élément $-u$ appelé symétrique de u (ou opposé de u) tel que $u + -u = 0_E = -u + u$.

- la multiplication vérifie :

- $\lambda u \in E$ *(stabilité par multiplication par un scalaire)*
- $1 \cdot u = u$.
- $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$. *(distributivité)*
- $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$. *(distributivité)*
- $(\lambda\mu) \cdot u = \lambda(\mu u)$.

Exercice 15 ().
Rappeler comment sont définies l'addition et la multiplication par un scalaire pour les éléments des ensembles suivants :

1. L'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 2 à coefficients réels.
2. L'ensemble des suites numériques à valeurs réelles.
3. L'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Ces ensembles avec ces opérations sont des exemples d'espaces vectoriels !

Exercice 16 ().
On considère l'ensemble des matrices carrés de taille 2 diagonales :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Pour l'ensemble E, parmi les 10 propriétés pour être un espace vectoriel, la plupart d'entre elles sont "héritées" de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, c'est-à-dire satisfaites automatiquement du fait que E est inclus dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel donc satisfait déjà les propriétés !
Quelles propriétés ne sont pas héritées ?

Correction

Toutes les propriétés qui ne relèvent pas de l'appartenance à l'ensemble E sont immédiatement vraies car pas spécifiques aux matrices de l'ensemble E. Elles sont vraies pour toutes les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ (car c'est un espace vectoriel) donc en particulier pour les matrices de E. En revanche, deux propriétés ne sont pas automatiquement vraies car elles concernent spécifiquement les matrices de l'ensemble E :

- *La stabilité par addition*
- *La stabilité par multiplication par un scalaire*

Exercice 17 ().
On pose $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur et on considère les deux ensembles suivants :

$$E_1 = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$E_2 = \left\{ a' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c'v \mid a', b', c' \in \mathbb{R} \right\}$$

1. Quelle inclusion a-t-on toujours entre ces deux ensembles ?

2. Si $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer que les deux ensembles ne sont pas identiques.
3. Si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, montrer qu'on a alors également l'inclusion dans l'autre sens en plus de l'inclusion de la question 1. Que conclure alors sur les deux ensembles ?

Exercice 18 ().
Une des applications importantes des applications linéaires est la cryptographie, où le but est de transformé un message en un message chiffré. La plupart des techniques de cryptage commencent par découper le message (que l'on supposera être une suite de nombres) en blocs d'une longueur spécifique : par exemple, un message peut être découpé en blocs de 4 nombres. Ces blocs peuvent alors être traités comme des vecteurs et on peut donc les transformer avec des applications linéaires.
Une permutation consiste à changer l'ordre des éléments des vecteurs :
par exemple, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$ peut être permuté en $\begin{pmatrix} d \\ b \\ a \\ c \\ e \end{pmatrix}$.
Démontrer que les permutations ci-dessous sont des applications linéaires, puis déterminer les matrices qui permettent d'effectuer ces permutations :

1. La permutation p_1 telle que pour tout $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : p_1\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$
2. La permutation p_2 telle que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : p_2\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} b \\ a \\ c \\ d \end{pmatrix}$
3. La permutation p_3 telle que pour tout $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : p_3\Big(\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}\Big) = \begin{pmatrix} c \\ a \\ b \\ d \end{pmatrix}$

Correction

1. *Posons* $v_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, $v_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, *et* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Alors :*

$$\begin{aligned}
p_1(\lambda v_1 + v_2) &= p_1\Big(\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\Big) \\
&= p_1\Big(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + x_2 \\ \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \end{pmatrix}\Big) \\
&= \begin{pmatrix} \lambda y_1 + y_2 \\ \lambda z_1 + z_2 \\ \lambda x_1 + x_2 \end{pmatrix} && \text{par définition de } p_1 \\
&= \lambda \begin{pmatrix} y_1 \\ z_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ z_2 \\ x_2 \end{pmatrix} \\
&= \lambda p_1(v_1) + p_1(v_2) && \text{en réutilisant la définition de } p_1
\end{aligned}$$

Ensuite, on cherche une matrice A *telle que pour tout vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}$$

Deux possibilités : soit on le fait "à l'œil", soit vous appliquez une méthode vue l'année dernière, qui demande de calculer $A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *et* $A \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et de placer ces vecteurs en colonnes de la matrice (c'est la construction d'une matrice d'une application linéaire dans une base canonique). On obtient dans tous les cas :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.
3.

Exercice 19 ().
On considère une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et on rappelle deux définitions :

- Le *noyau* de f, noté $\ker(f)$, est l'ensemble :

$$\ker(f) = \{v \in \mathbb{R}^2 \mid f(v) = 0\}$$

- L'*image* de f, noté $\mathrm{Im}(f)$, est l'ensemble :

$$\mathrm{Im}(f) = \{f(u) \mid u \in \mathbb{R}^2\}$$

Parmi les inclusions suivantes, lesquelles sont naturellement vraies ?

1. $\ker(f) \subset \operatorname{Im}(f)$
2. $\operatorname{Im}(f) \subset \ker(f)$
3. $\ker(f) \subset \mathbb{R}^2$
4. $\ker(f) \subset \mathbb{R}^3$
5. $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$
6. $\operatorname{Im}(f) \subset \mathbb{R}^3$

Correction

Le noyau de f est formé des antécédents du vecteur 0, ce sont donc des vecteurs de l'espace de départ (ici $\mathbb{R}^2$). Donc :

$$\ker f \subset \mathbb{R}^2$$

L'image de f est constitué de toutes les images des vecteurs de l'espace de départ, ou autrement dit de tous les vecteurs de l'espace d'arrivée (ici $\mathbb{R}^3$) qui ont bien un antécédent (ce n'est pas toujours le cas). Donc :

$$\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^3$$

Aucune autre inclusion n'est vraie, en particulier $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ ne contiennent pas dans cet exemple d'objets du même type (ce sont des vecteurs de tailles différentes) donc aucun ne peut être inclus dans l'autre.

Exercice 20 ().
On définit l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$$

Déterminer ce que fait précisément cette transformation.

Correction

Il s'agit de voir comment est défini $T(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix})$ pour n'importe quel vecteur $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

Or, puisque $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, on a par linéarité de T :

$$T(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}) = aT(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) + bT(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}) = a\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-b\\a\end{pmatrix}$$

La transformation T est ainsi bien décrite entièrement.
On peut aussi remarquer qu'il s'agit d'une rotation de $\frac{\pi}{2}$ (c'est l'effet qu'elle a sur le repère, effet qui se transmet à tous les autres points par linéarité).

Exercice 21 ().
Considérons deux ensembles E et F. On sait que l'on peut alors regarder les ensembles

- $E \times F$ (produit cartésien) représentant toutes les paires possibles d'un élément de E et d'un élément de F.
- $E \cap F$ (intersection) représentant l'ensemble des éléments qui sont à la fois dans E et dans F (éventuellement il n'y en a aucun et l'ensemble est vide.

On définit un troisième ensemble :

- $E+F$: l'ensemble des éléments qui sont l'addition d'un élément de E et d'un élément de F

Donner plusieurs exemples d'ensembles E et F où :

1. les ensembles $E \times F$, $E \cap F$ et $E+F$ peuvent bien être définis
2. les ensembles $E \times F$ et $E \cap F$ peuvent être définies mais pas $E+F$.

Exercice 22 ().
(pré-requis : exercice précédent)
Une entreprise veut atteindre un objectif de neutralité carbone. Pour cela, elle utilise deux stratégies :

- Captation de CO_2 (reboisement par exemple)
- Réductions des émissions

Chaque projet est représenté par un vecteur $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avec x le nombre de tonnes de CO_2 capturées et y le nombre de tonnes de CO_2 réduites.
On pose :

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 100 \right\} \qquad \text{et} \qquad F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid y \geq 50 \right\}$$

Expliquer concrètement ce que représentent les trois ensembles suivants :

1. $E \cap F$
2. $E \times F$
3. $E+F$

Correction

1. *$E \cap F$ représente les projets qui induisent à la fois une forte captation de carbone (≥ 100 tonnes) et une forte réduction des émissions (≥ 50 tonnes). On peut l'écrire ainsi :*
$$E \cap F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x \geq 100 \quad \text{et} \quad y \geq 50 \right\}$$
2. *$E \times F$ représente toutes les paires de projets possibles, le premier captant du CO_2 et le second réduisant les émissions.*
3. *$E+F$ représente les effets cumulés (ou fusionnés) de deux projets (un centré sur la captation et l'autre sur la réduction).*

Exercice 23 ().
Afin d'examiner visuellement sa parcelle dans sa globalité, un agriculteur utilise un drone en vol stationnaire (immobile) au-dessus de celle-ci, ce qui permet de réaliser des modèles numériques de terrain.
Le drone possède deux moteurs lui permettant de se stabiliser face au vent. Dans un repère "drono-centrique", on suppose que le vent ne souffle que dans une direction, celle du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, et applique donc une force colinéaire à celui ci. Les deux moteurs, eux, propulsent dans les directions données respectivement par les vecteurs $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, résultant en une force appliquée sur le drone qui est une combinaison linéaire de ces deux vecteurs.

1. Écrire sous la forme d'un ensemble de combinaisons linéaires :
   (a) L'ensemble représentant toutes les forces possibles dues au vent.
   (b) L'ensemble représentant toutes les forces possibles dues aux moteurs du drone.
2. Le drone peut-il bien se stabiliser ?
3. Quelle inclusion entre les deux ensembles précédents peut-on écrire ?