Exo 15 :

- Posons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites.

$\hookrightarrow (u_0, u_1, \ldots)$ $\hookrightarrow (v_0, v_1, \ldots)$

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} + (v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0+v_0, u_1+v_1, \ldots)$$
$$= (u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

$$\lambda \times (u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\lambda u_0, \lambda u_1, \ldots)$$
$$= (\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

- Posons
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \overset{\mathbb{R}_+}{\cancel{\mathbb{R}}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x) \end{array}$$

alors

- $$f + g : \begin{array}{ccc} \overset{\mathbb{R}_+}{\cancel{\mathbb{R}}} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (f+g)(x) = f(x) + g(x) \end{array}$$

- $$\lambda f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda \times f(x) \end{array}$$

Exercice 17 :

1) Montrons que $E_1 \subset E_2$:

Posons $v_1 \in E_1$. Montrons que $v_1 \in E_2$

On a $v_1 = a\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On cherche a', b', c' tels que

$$v_1 = a'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c'v$$

On choisit $a' = a$, $b' = b$ et $c' = 0$.

2) $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Montrons que $E_1 \neq E_2$</u>

$v \in E_2$

Voyons si $v \in E_1$

Cherchons a et b réels tels que

$$v = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

i.e. $$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nécessairement $a = 0$ ($1^{\text{ère}}$ coordonnée)

et $b = 0$ ($2^{\text{ème}}$ coordonnée)

or $v \neq 0$ donc c'est impossible.

Donc $v \notin E_1$ et donc $E_1 \neq E_2$

3) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

<u>Montrons que $E_2 \subset E_1$:</u>

Prenons $v_2 \in E_2$. Montrons que $v_2 \in E_1$.

On a $v_2 = a' \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b' \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c' \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

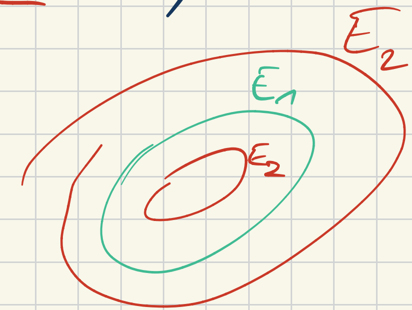
On cherche $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$v_2 = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Or, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $v_2 = a'\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + b'\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + c'\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

$$= \underbrace{(a'+c')}_{a}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \underbrace{(b'+c')}_{b}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$



Ainsi, $v_2 \in E_1$.

Et donc $E_2 \subset E_1$.

Et donc par double inclusion, $E_1 = E_2$

Exercice 21 :

$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{N}$, {chats} ,

$\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^{10}$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\underbrace{GL_n(\mathbb{R})}$

matrices carrées de taille n inversibles.

- $E \times F$: prendre les paires (e, f) avec $e \in E$ $f \in F$
  $\hookrightarrow$ possible dans tous les cas
- $E \cap F$: possible dans tous les cas mais est vide si les objets ne sont pas du

même type.

Non vide : • $\mathbb{R} \cap \mathbb{N}$

• $\mathbb{R}^3 \cap \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \cap GL_n(\mathbb{R})$

• $E + F$: il faut pouvoir additionner les objets de E avec ceux de F.

Donc pas toujours possible.

$\cancel{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \, ?}$

possibles : • $\mathbb{R} + \mathbb{N}$

• $\mathbb{R}^3 + \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

• $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) + GL_n(\mathbb{R})$

Exercice 23 :

1) a) Le vent souffle dans la direction du vecteur $\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

L'ensemble de toutes les forces possibles est :
$$\left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\}$$

b) L'ensemble des forces dues aux moteurs est :
$$\left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1 \in \mathbb{R}, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

2) La résultante des forces devant être nulle, on cherche si :

$$a\begin{pmatrix}3\\3\\-1\end{pmatrix} + \lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

i.e. $(*)\left[\lambda_1\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix}\right.$

or $a\begin{pmatrix}-3\\-3\\1\end{pmatrix} = a2\times\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix} - a\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$

On peut choisir $\underline{\lambda_1 = -a}$ et $\underline{\lambda_2 = 2a}$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

méthode 2 à partir de (*) :

$$\begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 = -3a \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -3a \\ \lambda_1 + \lambda_2 = a \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 - 2\lambda_2 = -3a \\ -3\lambda_2 = -6a \\ (-\lambda_2 = -2a) \end{cases}$$

proportionnelle à L_2

$$(\Leftarrow) \quad \begin{cases} -\lambda_1 = -3a + 2\lambda_2 = -3a + 4a = a \\ \lambda_2 = \dfrac{-6a}{-3} = 2a \end{cases}$$

Donc $\lambda_2 = 2a$ et $\lambda_1 = -a$

3) On a montré que

$$\left\{ a \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| a \in \mathbb{R} \right\} \subset \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\}$$