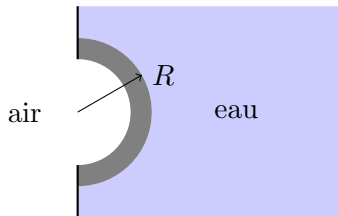


## TD1 MMC Fluides/Mécanique des Fluides Hydrostatique et Capillarité

### 1 Barrage voûte



On considère le barrage voûte de la figure (vue aérienne), en forme de demi-cylindre, de rayon moyen  $R$  et de faible épaisseur de paroi, retenant une hauteur d'eau  $h$ . Calculer la résultante des forces pressantes sur le barrage.

### 2 Bille de bois à l'interface eau/huile

On considère un récipient contenant deux liquides immiscibles (huile et eau) dans le champ de pesanteur. La densité de l'huile est plus faible que celle de l'eau :  $\rho_{huile} < \rho_{eau}$ .

1. Les deux fluides sont au repos. Comment se disposent-ils dans le récipient?
2. Quelle est la forme de la courbe  $P(z)$  de pression en fonction de l'altitude  $z$ ,  $z = 0$  étant pris au fond du récipient?
3. On introduit maintenant une bille de bois de densité intermédiaire ( $\rho_{huile} < \rho_{bois} < \rho_{eau}$ ) dans le récipient. Dessiner la bille à l'équilibre. Quelle fraction du volume de la bille est immergée dans l'eau? A.N. avec  $\rho_{eau} = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $\rho_{huile} = 600 \text{ kg.m}^{-3}$  et  $\rho_{bois} = 900 \text{ kg.m}^{-3}$ .

### 3 Ascension capillaire dans un dièdre

On considère deux plaques verticales partiellement immergées dans un liquide de tension de surface  $\gamma$ . On considérera le liquide comme totalement mouillant sur les plaques.



1. Dans la configuration où les plaques sont parallèles séparés d'une faible distance  $b$ , calculer la hauteur d'ascension du liquide entre les plaques en fonction des paramètres du problème.
2. Dans la configuration où les plaques forment un dièdre d'angle faible  $\alpha$ , quelle est la forme de la surface libre du liquide à l'intérieur? On donnera la fonction gouvernant la hauteur d'ascension capillaire  $h(x)$  dans le dièdre, où  $x$  désigne la distance horizontale à l'arête du dièdre. Ce résultat est-il valable pour si l'angle  $\alpha$  n'est pas petit?

## 4 Instabilité de Plateau-Rayleigh

Un mince filet d'eau sortant doucement d'un robinet se fragmente en un chapelet de gouttes. On cherche ici à caractériser le développement de cette instabilité, dite de Plateau-Rayleigh, qui conduit un cylindre de liquide à évoluer naturellement en un chapelet de gouttes. L'instabilité de Plateau-Rayleigh a été pour la première fois observée par Félix Savart en 1833. Cependant ce n'est qu'en 1857 que Joseph Plateau met en évidence que ce phénomène d'instabilité est dû à la tension de surface. Pour simplifier l'analyse, on supposera que le cylindre liquide de rayon initial  $R_0$  est sans vitesse.

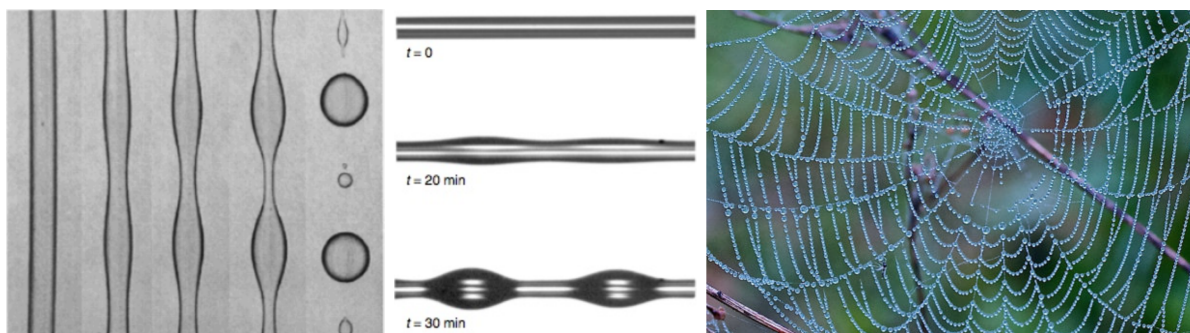


Figure 1: Images d'instabilité de Rayleigh-Plateau d'un filet liquide (à gauche), d'un manchon liquide sur une fibre (au centre) et de la rosée sur une toile d'araignée (à droite).

1. Quelle est la pression à l'intérieur du filet liquide ? Est-elle constante dans tout le filet?
2. On considère maintenant que le filet liquide présente une modulation de rayon qu'on supposera harmonique d'amplitude  $\epsilon \ll R$  et de nombre d'onde  $k$  :  $R(x) = R_m + \epsilon \cos(kx)$ .
3. Réfléchir à la pression dans le filet présentant une telle modulation spatiale. La pression  $y$  est-elle constante ou non? Si non, où seraient respectivement les zones de plus forte et plus faible pression? Réfléchir au sens des écoulements qui seraient générés par ces gradients de pression. Ces écoulements favoriseraient-ils une croissance de la modulation ou au contraire sa décroissance ?
4. Par conservation de la masse, établir la relation entre le rayon moyen  $R_m$  du filet perturbé et le rayon initial  $R_0$  du filet non perturbé.
5. Calculer la surface  $S$  du filet liquide perturbé. Montrer que cette surface peut être plus petite que la surface initiale  $S_0$  du filet non perturbé. A quelle condition sur la longueur d'onde  $\lambda = 2\pi/k$ ? Cette condition correspond-elle aux observations de Joseph Plateau qui immergea des gouttes d'huile dans de l'eau alcoolisée de façon à ajuster les densités, puis les déforma en cylindre avec une spatule jusqu'à observer l'instabilité du cylindre quand celui-ci était assez long : il nota que l'instabilité survient quand le rapport de sa longueur sur son diamètre est compris entre 3,13 et 3,18.