Evaluation du 9 décembre 2024

Savoir faire

- SF60 : Savoir calculer une intégrale connaissant la primitive
- SF64 : Savoir trouver les fonctions pour faire une IPP
- SF65 : Savoir faire un changement de variable donné

1. Calculer les intégrales suivantes :
   (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(3x-\pi)dx$
   (b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}dx$ (on pourra faire une IPP)
2. Calculer grâce à une IPP l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\pi} x\cos(x)dx$
3. En faisant le changement de variable $u=\sqrt{x}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})dx$.

Correction

1. (a) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin(3x-\pi)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(3x-\pi)\right]_0^{\pi} = -\frac{1}{3}\cos(2\pi)+\frac{1}{3}\cos(-\pi) = -\frac{1}{3}-\frac{1}{3} = -\frac{2}{3}$.

(b) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}dx$ *: en fait il n'y avait pas d'IPP (désolé), on reconnaît directement* $\dfrac{\ln(x)}{x} = u'(x)u(x)$ *avec* $u=\ln(x)$*, dont la primitive est* $\ln(x)^2/2$*. Donc* $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln(x)}{x}dx = [\ln(x)/2]_1^{e} = \frac{1}{2}$.

2. On pose $u=x$ *(donc* $u'=1$*) et* $v'(x)=\cos(x)$ *(donc* $v=\sin$*). On obtient grâce à la formule de l'IPP :*

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x\cos(x)dx &= [x\sin(x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)dx\\ &= 0-[-\cos(x)]_0^{\pi}\\ &= \cos(\pi)-\cos(0)\\ &= -2\end{aligned}$$

3. Si on pose $u=\sqrt{x}$ *on a* $x=u^2$ *donc* $dx=2udu$*. D'autre part si* $x=0$ *(resp.*

$x = \pi$) alors $u = 0$ (resp. $u = \pi$). Donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi^2} \cos(\sqrt{x})dx &= \int_0^{\pi} \cos(u)2udu \\
&= 2\int_0^{\pi} u\cos(u)du \\
&= -4
\end{aligned}$$

d'après la question précédente.