Evaluation du 5 décembre 2024

Corrigé

Exercice 1 *Niveau attendu*

1. (a) Calculer la dérivée de la fonction g définie par $g : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+2})$.
   (b) En déduire une primitive F de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.
2. En écrivant $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x))(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x$.
3. Soit $h(x) = x^x$. Calculer $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. Calculer $h'(x)$.

Correction

1. *(a) La dérivée de $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est $\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Donc la dérivée de g est donnée par*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}}{x+\sqrt{x^2+2}} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+2}}{(x+\sqrt{x^2+2})\sqrt{x^2+2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \end{aligned}$$

   (b) Une primitive de $x \mapsto \sqrt{x^2+2}$ est donc $F = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$.
2. *On a $\sqrt{x^2+1}-x = \dfrac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1}-x = 0$.*
3. *On sait que $h(x) = \exp(x\ln(x))$. Comme $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ (croissances comparées) on a $\lim\limits_{x\to 0} h(x) = e^0 = 1$. Comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ on a par composition $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$.*
   La dérivée de h se calcule avec la formule de la dérivée d'une fonction composée : on a $h'(x) = \exp(x\ln(x))(1+\ln(x)) = (1+\ln(x))x^x$.

Exercice 2 *Niveau avancé*

L'objectif de cet exercice est de démontrer une des propriétés de "croissance comparée" : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ pour tout $n \geq 1$.
On n'a donc bien sûr pas le droit d'utiliser cette propriété, ni aucune des autres croissances comparées, dans cet exercice
Pour cela, on pose $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$, que l'on étudie uniquement sur $\mathbb{R}^+$.

1. Calculer la dérivée g de f, puis la dérivée de g.
2. En déduire le sens de variation de g, puis celui de f.
3. Déduire des questions précédentes que pour tout $x \in \mathbb{R}^+_*$ on a
$$\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$$
4. En déduire que $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
5. En écrivant $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$, en déduire une preuve de
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Correction

1. *On a* $g(x) = f'(x) = e^x - x$ *et* $g'(x) = f''(x) = e^x - 1$.
2. *Comme* $x \mapsto e^x$ *est croissante, on a pour tout* $x \geq 0$, $e^x \geq 1$. *Donc* $e^x - 1 \geq 0$ *et donc* g *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$. *Finalement on a* $g(0) = 1$ *donc* $g(x) \geq 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$. *Donc* f *est croissante sur* $\mathbb{R}^+$.
3. *On a donc* $f(x) \geq f(0)$ *pour tout* $x \geq 0$. *Comme* $f(0) = 1$ *on a donc* $f(x) \geq 0$ *pour tout* $x > 0$. *Donc* $e^x \geq \frac{x^2}{2}$, *et donc en divisant par* x *on obtient* $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$.
4. *Comme* $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ *on a par théorème d'encadrement* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.
5. *On a clairement* $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{e^{\frac{x}{n}}}{x}\right)^n$. *Or à* n *fixé on a d'après la question précédente* $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{x/n}}{x} = +\infty$, *et donc (vu que* n *est constant et non nul)* $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x/n}}{x} = +\infty$. *En élevant à la puissance* n *on a le résultat.*

Exercice 3 *Niveau expert*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Supposons que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ avec $\ell > 0$ un réel.

1. Ecrire la définition rigouseuse de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.
2. Démontrer qu'il existe un $A > 0$ tel que pour tout $x > A$ on ait $f(x) > 0$.
3. On suppose de plus que f est croissante. Démontrer que $f(x) \leq \ell$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Si g est une fonction avec $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, g est-elle croissante sur un voisinage de $+\infty$? Pourquoi ?

Correction

1. $$\forall \varepsilon > 0\ \exists A > 0\ \ \forall x > A\ \ \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$$

2. *On prend* $\varepsilon = \ell/2$ *et on applique la propriété ci-dessus : cela donne un* A *tel que pour* $A > 0$ *on ait en particulier* $f(x) > \ell - \dfrac{\ell}{2}$ *donc* $f(x) > \ell/2 > 0$.

3. *Supposons que l'on ait un* x_0 *tel que* $f(x_0) > \ell$. *On prend* $\varepsilon = f(x_0) - \ell$ *dans la définition de limite, cela nous donne un* A *tel que pour* $x > A$ *on ait* $f(x) < \ell + \varepsilon = f(x_0)$. *Si on prend* x *à la fois supérieur à* A *et à* x_0, *on obtient une contradiction. On a donc* $f(x_0) \leq \ell$, *pour n'importe quel* x_0.

4. *Non, ce n'est pas forcément le cas. On peut s'en convaincre avec un dessin, ou avec la fonction* $x \mapsto x + 2\cos(x)$.